



Luigi Togliani

Liceo Scientifico  
"Belfiore" - Mantova  
luigi.togliani@gmail.com

# La macchina di Atwood: aspetti didattici

(Pervenuto il 21.7.2017, approvato il 6.10.2017)

## ABSTRACT

Some activities on Atwood's machine are described, involving both theory and experiment and based on the use of a) two conventional weights and a sonar sensor, b) a smartphone with an internal accelerometer replacing one of the two weights. These activities are accompanied by a short analysis of Atwood's equipment as given in his original *Treatise*.

## Introduzione

In vari libri di testo viene presentata la macchina di Atwood come esempio per illustrare i principi e le applicazioni della dinamica newtoniana (vedi [1], [2], [3]). Questo dispositivo prende il nome dal matematico e fisico londinese George Atwood (1745-1807) che lo studiò e lo utilizzò nella sua opera *Treatise on the Rectilinear Motion and Rotation of Bodies* del 1784 (vedi [4]), come viene specificato successivamente in questo articolo.

Atwood studiò presso il Trinity College di Cambridge, presso il quale si laureò nel 1769; nello stesso anno egli conseguì lo Smith's Prize, un prestigioso premio annuale che fu inaugurato proprio in quell'anno e che fu da subito destinato a due o più Bachelors of Arts che si fossero distinti nel campo delle discipline matematiche e/o fisiche.

## La macchina di Atwood

La macchina di Atwood è costituita da una puleggia fissata ad un sostegno; nella gola della puleggia passa un filo inestensibile alle cui estremità vengono fissati due oggetti 1 e 2 di masse rispettive  $m_1$  e  $m_2$ . Se la puleggia e il filo hanno massa trascurabile rispetto alle masse in gioco e se si trascurano l'inerzia e l'attrito della puleggia col perno sul quale ruota, si può ritenere che il sistema dei due oggetti sia sottoposto soltanto ai loro pesi  $P_1$  e  $P_2$  e alla tensione  $T$  della fune che agisce ugualmente su entrambi i suoi estremi (figura 1). In questo caso parliamo di macchina di Atwood ideale.

Se  $m_1 > m_2$  la puleggia del sistema si mette in rotazione in senso antiorario (fig. 1). In base alla seconda legge di Newton, indicato con  $a$  il modulo dell'accelerazione del sistema, l'oggetto 1 è sottoposto a una forza risultante rivolta verso il basso, di modulo  $m_1 a = m_1 g - T$ , mentre l'oggetto 2 è sottoposto a una forza risultante rivolta verso l'alto, di modulo  $m_2 a = T - m_2 g$ . Da queste due equazioni si ricava che:

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g, \quad T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g \quad (1)$$

Nel caso in cui  $P_1 = P_2$ , come conseguenza del principio d'inerzia, il sistema si muoverà a velocità costante; in particolare resterà fermo se lo era inizialmente.

Se, invece, vogliamo prendere in esame una macchina reale di Atwood, dobbiamo tener conto dell'inerzia della puleggia pensata come un disco omogeneo avente massa  $m_d$ , raggio  $R$  e momento d'inerzia  $I = m_d R^2/2$ ; allora l'accelerazione  $a$  del sistema vale:

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + m_d/2} g = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + I/R^2} g \quad (2)$$

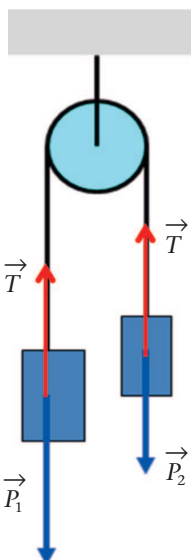


Figura 1.

mentre le tensioni  $T_1$  e  $T_2$  ( $T_1 > T_2$ ) risultano rispettivamente:

$$T_1 = \frac{(2m_2 + m_d/2)m_1}{m_1 + m_2 + m_d/2} g, \quad T_2 = \frac{(2m_1 + m_d/2)m^2}{m_1 + m_2 + m_d/2} g \quad (3)$$

come spiegato efficacemente in [5] e in [6]. Maggiore complessità assume il calcolo di  $a$  nel caso che si voglia tener conto delle forze d'attrito e della massa del filo (vedi [5], [6], [7], [8]).

Occorre prendere ora in esame altri aspetti cinematici del sistema di Atwood. Supponendo che all'istante 0 le due masse partano da ferme e che si muovano di moto uniformemente accelerato, il tempo necessario perché ciascuna di esse percorra un tratto  $s$  è dato da:

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{2(m_1 + m_2 + m_d/2)s}{(m_1 - m_2)g}} \quad (4)$$

mentre la velocità del sistema alla fine del tratto di lunghezza  $s$  è fornita da:

$$v = \sqrt{2as} = \sqrt{\frac{2(m_1 - m_2)gs}{m_1 + m_2 + m_d/2}} \quad (5)$$

In un esperimento di tipo tradizionale con la macchina di Atwood si può far partire dal suolo l'oggetto 2 più leggero, in modo da poter misurare facilmente la distanza  $s$  dal suolo dell'oggetto 1 più pesante (vedi figura 2). Liberato l'oggetto 2 si può misurare il tempo  $t$  impiegato da 1 per raggiungere il suolo e quindi la velocità di 1 un attimo prima di toccare il suolo usando la relazione  $v = at$ , nota l'accelerazione  $a$  da (2). I valori ottenuti per  $t$  e  $v$  possono essere confrontati con quelli previsti da (4) o da (5). Questa situazione viene presa in esame e sviluppata in [9] per una macchina di Atwood ideale ( $m_d = 0$ ), utilizzando anche il principio di conservazione dell'energia meccanica. Un'estensione di questo tipo di analisi è proposta in [10], corredata da risultati sperimentali ottenuti con un sistema online di rilevazione dei dati.

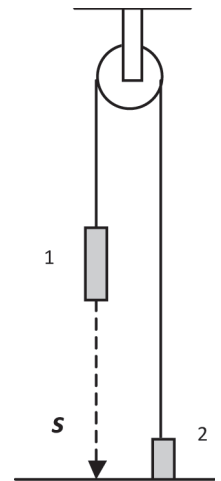


Figura 2.

### Un esperimento online con la macchina di Atwood

Ho realizzato questo semplice esperimento perché gli studenti possano lavorare concretamente su una macchina di Atwood e non limitarsi a risolvere esercizi o problemi su questo sistema. Ho utilizzato come puleggia una *Super Pulley* della Pasco perché questo strumento è di piccola massa (circa 5,0 g) e di piccolo raggio (circa 2,55 cm) e garantisce una rotazione con poco attrito. Il valore dichiarato del momento d'inerzia della puleggia è  $1,86 \cdot 10^{-6} \text{ kg m}^2$ . Come filo ho adoperato uno di quelli in uso per cucire. I due oggetti non sono altro che pile di dischetti da 10 g o da 20 g l'uno facilmente rintracciabili nei laboratori didattici. Si parte appendendo alle estremità del filo due oggetti di ugual massa, per esempio con uno/due dischetti da entrambi gli estremi (nel caso considerato  $m_1 = m_2 = (20,0 \pm 0,3) \text{ g}$ ). Mettendo inizialmente in moto il sistema, si nota come

esso si muova con velocità apparentemente costante. Per verificare questa impressione utilizziamo un sistema online di rilevazione dei dati che fa uso di un sensore di posizione (sonar a ultrasuoni) Go!Motion della Vernier posizionato sotto l'oggetto destinato a salire. Il sensore è collegato con apposito cavo al pc sul quale è già installato il programma Logger Lite. I dati relativi alla durata ed alla posizione dell'oggetto in moto vengono così trasferiti in una tabella a fianco della quale appare immediatamente il relativo grafico; la frequenza di campionamento usata è di 0,05 s. I dati con il grafico posizione vs. tempo sono riportati in figura 3: si nota la lunga porzione rettilinea del grafico che riguarda il tratto di moto uniforme del sistema, seguito dal rimbalzo conseguente all'arrivo al suolo dell'oggetto in discesa.

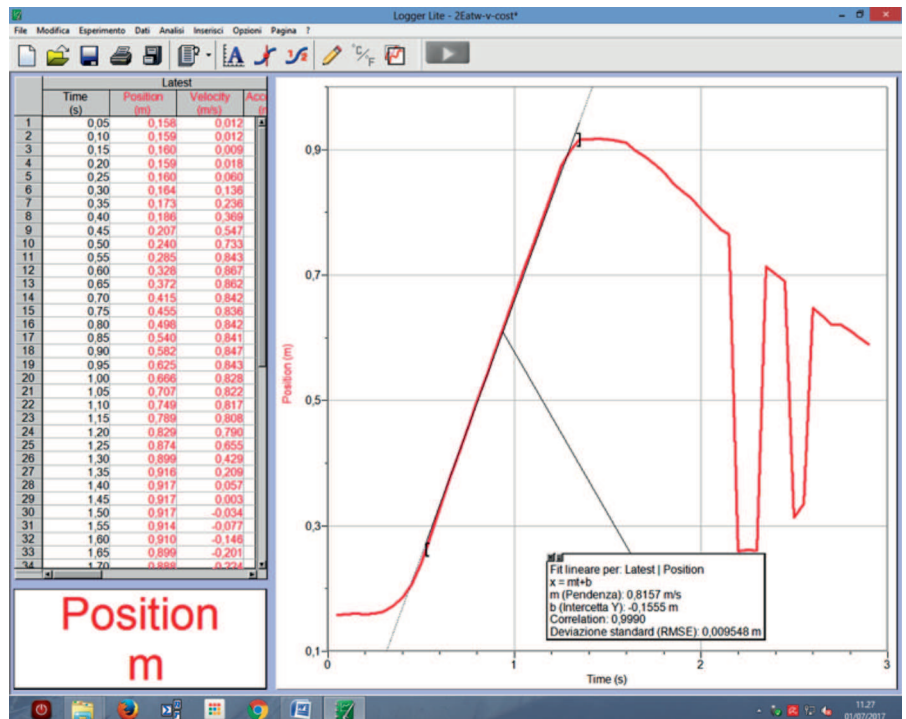


Figura 3.

Il software impiegato consente di inserire un fit lineare tra i dati sperimentali: la pendenza della retta fornisce la velocità media, valutata, nel caso in esame, in circa 0,82 m/s.

La seconda parte dell'esperienza consiste nell'esaminare e nel registrare il moto del sistema di Atwood nel caso di oggetti con masse diverse (figura 4). Ad esempio, con  $m_1 = (30,0 \pm 0,3)$  g e  $m_2 = (20,0 \pm 0,3)$  g si è ottenuto il grafico velocità vs. tempo di figura 5; in questo caso il fit lineare fornisce una pendenza che rappresenta l'accelerazione media del sistema nel tratto considerato, che è di  $(1,92 \pm 0,05)$  m/s<sup>2</sup>, a fronte di un valore teorico ideale di  $(2,0 \pm 0,1)$  m/s<sup>2</sup> ricavabile dalla prima delle formule (1). Se, invece, vogliamo tener conto della massa  $m_d = 5,0$  g della puleggia, ovvero del suo momento d'inerzia  $I = 1,86 \cdot 10^{-6}$  kg m<sup>2</sup> e del suo raggio  $R = 2,55$  cm, usiamo la formula (2) e con essa otteniamo il valore teorico di  $(1,9 \pm 0,1)$  m/s<sup>2</sup>, coerente con i due precedenti valori.

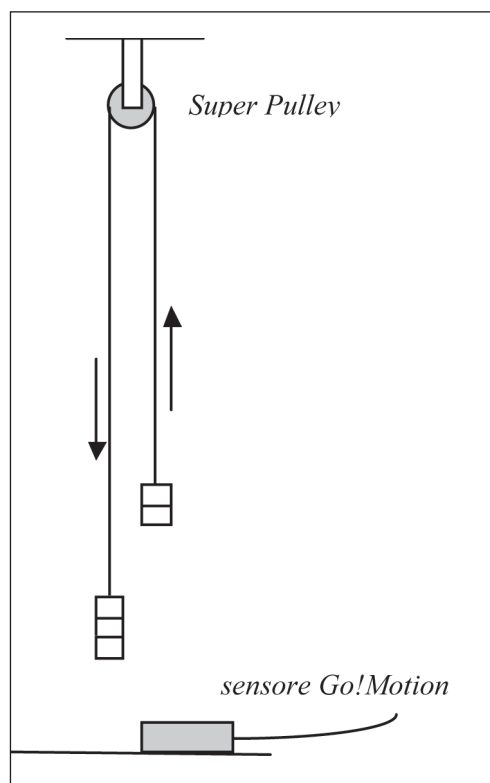


Figura 4.

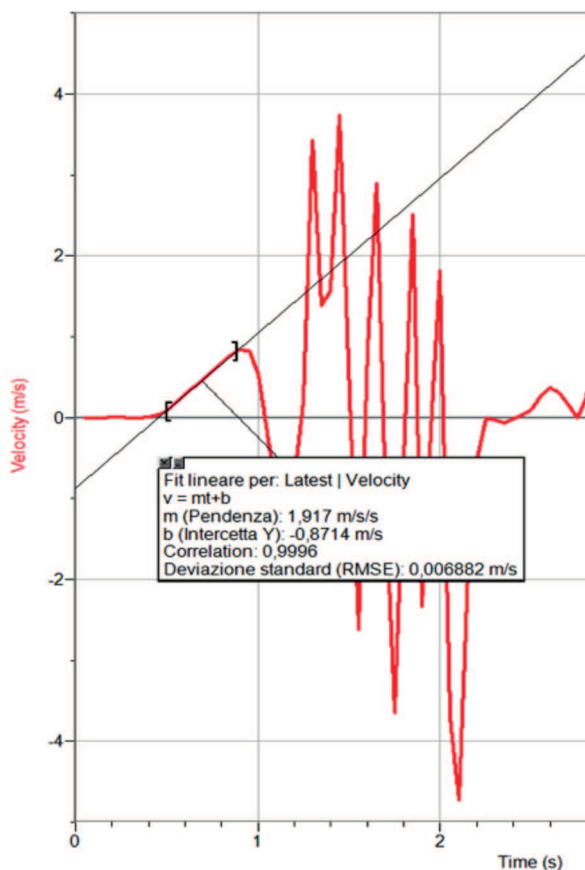


Figura 5.

Ulteriori prove confermano, entro gli errori sperimentali, le previsioni del modello teorico. Il semplice dispositivo presentato dà la possibilità di studiare moti uniformemente accelerati con accelerazioni qualsiasi, inferiori all'accelerazione di gravità  $g$  al suolo.

### Un esperimento sulla macchina di Atwood con lo smartphone

Un'interessante proposta di attività laboratoriale sulla macchina di Atwood viene suggerita da un gruppo di ricercatori uruguayani dell'Università di Montevideo (vedi [11]). Ponendo uno smartphone al posto dell'oggetto più pesante ( $m_1$ ) di fig. 1 e un contrappeso di massa inferiore ( $m_2$ ), si riutilizza l'apparato sperimentale precedente.

Ho ricostruito questo esperimento utilizzando uno smartphone LG sul quale è stata precedentemente installata l'app gratuita Vernier Graphical Analysis per Android. Ho usato due elastici ed un fermaglio opportunamente adattato al fine di fissare ad un estremo del filo lo smartphone di massa complessiva  $m_1 = (155 \pm 1)$  g. All'altro estremo ho posto un porta-pesi con alcuni pesetti (vedi fig. 6) con massa complessiva  $m_2 = (140 \pm 1)$  g; sulla base di questi dati, si può prevedere un'accelerazione del sistema (ideale) di Atwood del valore di  $a = (0,50 \pm 0,07)$  m/s<sup>2</sup>, applicando la (1). In una seconda prova ho preso  $m_2 = (120 \pm 1)$  g; in questo caso il valore teorico ideale è  $a = (1,25 \pm 0,07)$  m/s<sup>2</sup>.

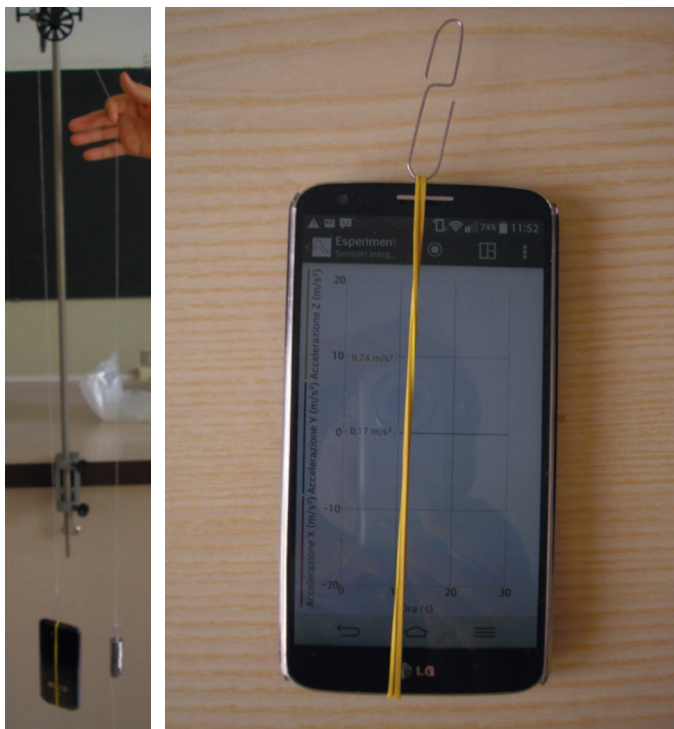


Figura 6.

Tornando all'esperimento, scegliendo le opzioni *Crea un nuovo esperimento* e poi *Sensori integrati*, appaiono i tre grafici delle tre componenti spaziali dell'accelerazione in funzione del tempo. Lasciando andare il sistema viene registrato il moto uniformemente accelerato di cui appare, in particolare, il grafico (di colore blu) della componente verticale Y dell'accelerazione in funzione del tempo; le altre due tracce del grafico riguardano le rimanenti componenti dell'accelerazione che sono mediamente nulle (fig. 7). Il valore della componente verticale dell'accelerazione fornito dal grafico deve essere sottratto a quello dell'accelerazione di gravità se si vuole ottenere l'accelerazione del sistema rispetto al riferimento terrestre che è riportata in (1).

Nella prima prova dell'esperimento (prima immagine di fig. 7) sul display dello smartphone appare, nella prima parte a sinistra, quando lo smartphone è fermo, il grafico della componente verticale dell'accelerazione che è mediamente pari a  $g = (10,07 \pm 0,13) \text{ m/s}^2$ ; nella seconda parte del grafico, quando lo smartphone è in discesa, l'accelerazione è in media  $a' = (9,55 \pm 0,11) \text{ m/s}^2$ . Quindi l'accelerazione dello smartphone, rispetto a terra, vale:

$$a = g - a' = (10,07 \pm 0,13) \text{ m/s}^2 - (9,55 \pm 0,11) \text{ m/s}^2 = (0,52 \pm 0,24) \text{ m/s}^2 = (0,5 \pm 0,2) \text{ m/s}^2,$$

in accordo con quanto previsto teoricamente.

Nella seconda prova (seconda immagine di fig. 7)  $a' = (8,77 \pm 0,36) \text{ m/s}^2$ , mentre  $g = (10,01 \pm 0,20) \text{ m/s}^2$ ; quindi

$$a = g - a' = (10,01 \pm 0,20) \text{ m/s}^2 - (8,77 \pm 0,36) \text{ m/s}^2 = (1,24 \pm 0,56) \text{ m/s}^2 = (1,2 \pm 0,4) \text{ m/s}^2,$$

ancora in buon accordo con la previsione teorica.

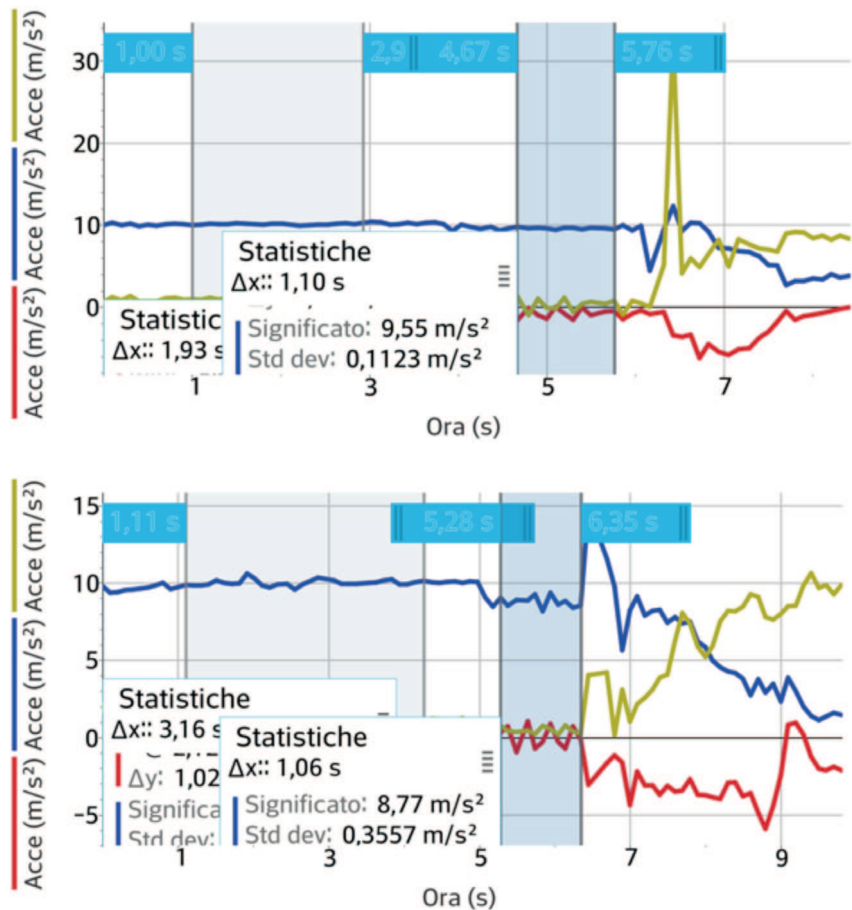


Figura 7.

Per il calcolo del valor medio dell'accelerazione basta selezionare direttamente sul grafico un intervallo di tempo (che appare ombreggiato), attivare "Acceso" nel menu STATISTICHE e confermare con OK: sul grafico appare una finestra con i valori medi delle tre componenti dell'accelerazione, ciascuno con la sua deviazione standard.

L'utilizzo dello smartphone permette di studiare l'accelerazione di un oggetto in moto nel sistema di riferimento dell'oggetto stesso, aprendo così la strada a utili considerazioni sul moto relativo.

**La macchina di Atwood nel *Treatise on the Rectilinear Motion and Rotation of Bodies***

A completamento del percorso proposto può essere utile, sul piano didattico, la lettura in classe di alcuni passi del lavoro originale di Atwood per scoprire le finalità che lo scienziato si proponeva con l'impiego della sua macchina. Alle pag. 109 e 110 del *Treatise* l'Autore inizia a descrivere il suo dispositivo col seguente passo, a fianco del quale ho riportato la figura di riferimento presentata nell'appendice dell'opera (figura 8).

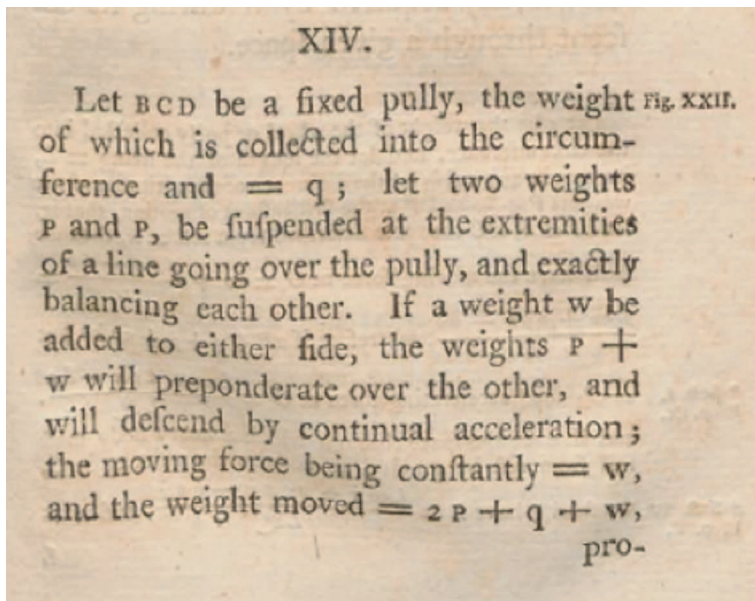
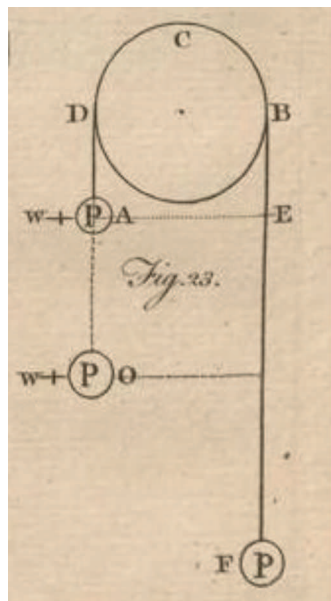


Figura 8.

«Sia BCD una puleggia fissata, il cui peso è racchiuso nella circonferenza ed è uguale a  $q$ ; i due pesi P e P siano appesi all'estremità di un filo passante sopra la puleggia, ed esattamente in equilibrio tra loro. Se viene aggiunto un peso  $w$  ad un estremo qualunque, i pesi  $P + w$  saranno preponderanti sull'altro e discenderanno con accelerazione costante, essendo la forza motrice costantemente uguale a  $w$ , e il peso messo in moto uguale a  $2P + q + w$ , sempreché il peso della fune sia troppo piccolo per avere un qualsiasi effetto sensibile».

Nella Sezione VII del *Treatise Containing a description of experiments on the rectilinear motion of bodies, which are acted on by constant forces*, George Atwood sottolinea la difficoltà che si incontra nello studiare la caduta libera dei corpi a causa dell'eccessiva rapidità del moto e quindi prende in esame, alla stregua di Galileo, la discesa lungo un piano inclinato. Ma subito dopo osserva (pag. 298) che in questi esperimenti

«non c'è possibilità di separare la massa in moto dalla forza motrice e non possiamo applicare forze diverse per mettere in moto la stessa quantità di materia su un dato piano, o la stessa forza a differenti quantità di materia. Inoltre, essendo la forza acceleratrice costante e inseparabile dal corpo messo in moto, la sua velocità verrà continuamente incrementata, tanto da rendere impossibile l'osservazione della velocità acquisita ad ogni dato istante. Perciò può non essere del tutto inutile descrivere un strumento tale da sottoporre all'esame sperimentale le proprietà delle cinque quantità meccaniche, cioè la quantità di materia in moto, la forza costante che la muove, lo spazio percorso dalla posizione di riposo, il tempo di percorrenza e la velocità acquisita».

Nasce quindi la necessità di costruire uno strumento idoneo a conseguire gli obiettivi indicati, senza produrre gli inconvenienti riscontrati per il piano inclinato. Tale strumento, rappresentato nelle tavole 78 e 83 dell'appendice del *Treatise* (fig. 9), viene così descritto (pag. 299-300):

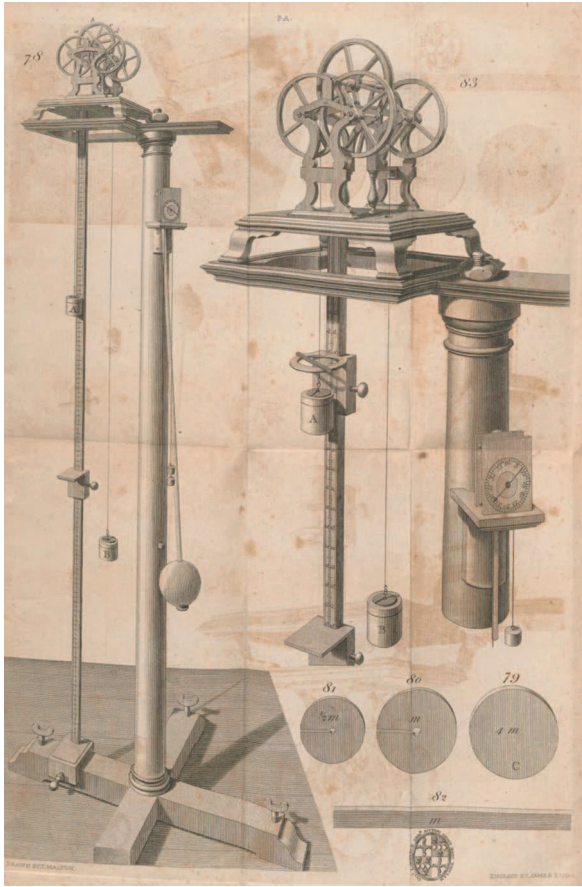


Figura 9.

«Così nello strumento costruito per illustrare sperimentalmente questo argomento A, B rappresentano due pesi uguali fissati alle estremità di un filo di seta molto sottile e flessibile; questo filo viene steso sulla ruota o su una puleggia fissata abcd, che può muoversi attorno ad un asse orizzontale: essendo i due pesi A, B esattamente uguali e agendo uno opposto all'altro, essi restano in equilibrio; e quando un peso è superiore all'altro (trascurando gli effetti dell'attrito) esso finirà per prevalere. Quando A, B sono messi in moto dall'azione di qualsiasi massa  $m$ , la somma  $A + B + m$  costituirebbe l'intera massa in movimento, se non ci fosse l'inerzia dei materiali che devono necessariamente essere usati nella trasmissione del moto; questi materiali consistono di:

1. La ruota abcd sulla quale passa il filo che regge A e B.
2. Le quattro ruote sulle quali si appoggia l'asse della ruota abcd: l'impiego di queste ruote è per prevenire la mancanza di moto che potrebbe essere dovuta all'attrito dell'asse se esso gira attorno ad una superficie immobile.
3. Il filo al quale sono fissati i corpi A e B in modo da mettersi in moto con uguali velocità.

Il peso e l'inerzia del filo sono troppo piccoli per produrre effetti sensibili sugli esperimenti [...]; ma l'inerzia degli altri materiali appena descritti costituisce una

considerabile quantità di massa messa in moto e dev'essere tenuta in considerazione».

Segue una lunga e accurata spiegazione su come può essere valutata questa "inerzia dei materiali" con modalità di carattere sperimentale; si stabilisce che le ruote hanno un'inerzia complessiva di  $11 m$ , essendo  $m$  una convenzionale unità di massa pari a 0,25 onces. Successivamente (p. 304) Atwood specifica che A e B sono due contenitori (*boxes*) cilindrici, ciascuno di massa  $6 m = 1,5$  onces, che possono ricevere masse campione variabili da  $0,25 m$  a  $m$ . Caricando sia A che B con  $20 m$ , la massa totale di A e B insieme è di  $52 m$ , cui si deve aggiungere l'inerzia dei materiali pari a  $11 m$ ; così la massa complessiva del sistema (in equilibrio) risulta  $M_t = 63 m$ . Aggiungendo ad A una sola massa campione  $m$ , la massa totale è  $M_t = 64 m$ , mentre le masse di A e di B sono rispettivamente  $M_A = 27 m$ ,  $M_B = 26 m$ ; quindi l'accelerazione del sistema risulta:  $a = \frac{M_A - M_B}{M_t} g = \frac{m}{64m} g = \frac{g}{64}$ .

Successivamente Atwood presenta altre prove sperimentali aggiungendo masse campione ad A e sottraendole a B in modo di mantenere invariata a  $64 m$  la massa totale  $M_t$  del sistema. In secondo luogo presenta esperienze con un prefissato valore della differenza di masse  $M_A - M_B$  e quindi della forza netta agente sul sistema.



Per valutare gli spostamenti, Atwood fa riferimento all'asta graduata verticale lunga 64 pollici e sensibile al decimo di pollice della sua macchina, che può essere percorsa dall'oggetto A che scende da un dato punto O della scala fino ad incontrare la mensola quadrata (*square stage*) di fig. 9 che è fissata all'asta in un punto scelto dallo sperimentatore. La durata del moto è data dalle oscillazioni di un pendolo che batte il secondo: l'oggetto A viene lasciato andare nell'istante in cui il pendolo dà un battito e la posizione della mensola viene regolata in modo da essere colpita ad un successivo battito del pendolo. Per ultimo l'Autore prende in esame la determinazione della velocità di discesa dell'oggetto A. Seguono numerose esemplificazioni sperimentali sull'impiego dello strumento.

## Conclusioni

La macchina di Atwood può rappresentare un utile strumento di laboratorio didattico per facilitare la comprensione delle leggi della dinamica classica e alcune loro applicazioni. È un dispositivo versatile che consente di operare con un range molto ampio di accelerazioni possibili, che sono comunque sempre inferiori a  $g$ . L'uso di un sensore di posizione consente di rilevare una gran quantità di dati che possono generare grafici temporali dello spostamento, della velocità e dell'accelerazione. In particolare, l'impiego dello smartphone permette anche l'uso del concetto di moto relativo al sistema di riferimento scelto. Storicamente la macchina di Atwood ebbe un notevole successo immediatamente dopo la diffusione del *Treatise on the Rectilinear Motion and Rotation of Bodies* del 1784 e servì a veicolare il paradigma newtoniano di scienza fisica (vedi [12]).

## Bibliografia e sitografia

- [1] ROMENI C., *La Fisica di tutti i giorni*, vol. 2, Zanichelli, Bologna, 2014.
- [2] AMALDI U., *L'Amaldi per i licei scientifici. Blu*, vol. 1, Zanichelli, Bologna, 2015.
- [3] HALLIDAY D., RESNICK R., WALKER, J. *Fondamenti di Fisica-I*, Zanichelli, Bologna, 2015.
- [4] ATWOOD G., *Treatise on the Rectilinear Motion and Rotation of Bodies*, Archdeacon, Cambridge, 1784, in: <http://www.e-rara.ch/zut/content/structure/1227245>.
- [5] PECORI B., TORZO G., SCONZA A., "Come valorizzare un antico esperimento didattico con la tecnica MBL: la macchina di Atwood per condurre una ricerca sperimentale sul moto", *La Fisica nella Scuola*, XXXI, 2, (1998), 83-104.
- [6] CRISTALLINI A., "La macchina di Atwood", 1-16, in: [https://www.academia.edu/26217468/LA\\_MACCHINA\\_DI\\_ATWOOD](https://www.academia.edu/26217468/LA_MACCHINA_DI_ATWOOD)
- [7] JOHNSON G.O., "Making Atwood's Machine 'Work'", *The Physics Teacher*, Vol. 39, (2001), 154-158.
- [8] TARNOPOLSKI M., "On Atwood's Machine with a Nonzero Mass String", *The Physics Teacher*, Vol. 53, (2015), 494-496.
- [9] LO PRESTO M.C., "Another Look on Atwood's Machine", *The Physics Teacher*, Vol. 37, (1999), 82-83.
- [10] BEEKEN P., "Atwood's Heavy Chain", *The Physics Teacher*, Vol. 49, (2011), 470-472.
- [11] MONTEIRO M., STARI C., CABEZA C., MARTI A.C., "The Atwood machine revisited using smartphones", *The Physics Teacher*, Vol. 53, (2015), 373-374.
- [12] ESPOSITO S., SCETTINO E., "Spreading Newtonian Philosophy with Instruments: the Case of Atwood's Machine", *Advances in Historical Studies*, Vol. 3, (2014), 68-81.