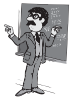

Ledo Stefanini
Università di Mantova-Pavia

Un modello idraulico del ciclo di Carnot

(Pervenuto l'8.4.2011, approvato l'11.5.2012)

ABSTRACT
The performance of an ideal hydraulic engine that transfers water between two reservoirs at different heights is compared with that of a reversible Carnot engine. The interest of this analogy between thermodynamic and mechanical quantities for a Karlsruhe type of teaching approach is discussed.

1. Introduzione

Le grandezze fisiche per le quali vale un'equazione di continuità sono dette *substance-like* [1].

Di tale natura, per esempio, sono la massa, la carica elettrica e l'entropia; ma anche la quantità di moto e l'energia. Il fatto che per queste grandezze valgano equazioni formalmente analoghe è stato posto in evidenza da molti anni da un gruppo di fisici che faceva capo all'università di Karlsruhe e che mostrò come si potrebbero utilizzare queste analogie formali per conferire una forma più compatta all'insegnamento della fisica [2].

Nell'insegnamento non si tiene a sufficienza conto del fatto che, nonostante le varie branche della fisica utilizzino vocabolari diversi, tuttavia le immagini che ne rappresentano il substrato concettuale sono simili. Peraltro, gli storici della scienza ci insegnano quanta parte vi abbiano avuto le analogie. Nella riflessione sulla macchina di Carnot l'aspetto didatticamente più difficile per il ragazzo non è rappresentato dal linguaggio matematico, ma piuttosto dalla difficoltà di appropriarsi di due concetti diversi e tuttavia connessi: quelli di entropia e di trasformazione reversibile [3].

Proprio in considerazione delle difficoltà didattiche connesse con la grandezza *entropia*, non mancano in letteratura segnalazioni di analogie con altre grandezze; anche su pubblicazioni che ci sono vicine [4] [5]. In questa nota proponiamo un modello meccanico del ciclo di Carnot dal quale si possono ricavare interessanti analogie tra grandezze termodinamiche estensive (come l'energia e l'entropia) o intensive (come la temperatura) e le più familiari grandezze meccaniche.

2. La macchina

Si immagini un recipiente (Fig. 1) a forma di parallelepipedo, aperto in alto, e diviso in due camere da una parete (indicata con P) che può scorrere senza attrito pur tenendo l'acqua. Indichiamo con L la sua dimensione trasversale.

La camera di sinistra, inizialmente di lunghezza x_0, contiene acqua fino ad un'altezza H.

Sfruttando la pressione dell'acqua, possiamo spostare la parete P di un tratto $(x - x_0)$ in due modi diversi:

1. attraverso una trasformazione che potremmo chiamare *isobara* per il suo significato idrostatico (ma che in vista dell'analogia termodinamica sarebbe più appropriato definire *isoterma*) che mantiene costante il livello iniziale H dell'acqua;
2. attraverso una trasformazione, nella quale non hanno luogo scambi di acqua con l'esterno, per cui il volume dell'acqua contenuta nel recipiente si conserva e che, in vista dell'analogia termodinamica, potremmo chiamare *adiabatica.*

A queste trasformazioni corrispondono scambi diversi di acqua e di energia, posto che questi scambi siano associati. Le trasformazioni che prendiamo in considerazione hanno carattere quasi-statico, cioè tali da non provocare turbolenze all'interno del liquido. Si tratta di trasformazioni che, come le analoghe dei gas, richiedono la transizione continua da uno stato di equilibrio all'altro. In particolare la forza idrostatica che l'acqua esercita sulla parete mobile è continuamente equilibrata da una forza uguale e contraria.

3. Sui due tipi di trasformazione

Per realizzare la trasformazione isobara sarà necessario collegare la camera con un grande recipiente che contenga acqua fino al livello H. In tal caso la forza agente sulla parete mobile è costante e vale

$$F = \frac{1}{2}\rho g L H^2 \tag{1}$$

dove ρ è la densità dell'acqua e g l'intensità del campo gravitazionale, per cui il lavoro compiuto dalla forza idrostatica nello spostamento $(x - x_0)$ è

$$L_{isob} = \frac{1}{2}\rho g L H^2 \left(x - x_0\right). \tag{2}$$

La quantità d'acqua che entra nella macchina nella trasformazione è

$$Q = \rho\left(x - x_0\right) L H. \tag{3}$$

Poiché l'energia gravitazionale è proporzionale alla profondità, a tale apporto d'acqua è associato un incremento di energia gravitazionale

$$\Delta U = \frac{1}{2} Q g H = \frac{1}{2}\rho\left(x - x_0\right) g L H^2 \tag{4}$$

che ha lo stesso valore del lavoro compiuto. Questa è una cosa degna di nota: il sistema compie lavoro e, alla fine, si ritrova con un'energia interna aumentata di una quantità uguale a quella ceduta come lavoro meccanico. Il fatto che per questa trasformazione valga una sorta di *Teorema del viriale* [6] è dovuto alla caratteristica del sistema di essere collegato ad una sorgente illimitata di energia. Il teorema citato viene assunto come spiegazione del fatto che una delle condizioni per la stabilità di una stella è che abbia una capacità termica negativa, ovvero che ad una somministrazione di calore segua una diminuzione della temperatura [7]. Più vicina all'esperienza scolastica è l'espansione isobara di una mole di gas ideale. In tal caso (attribuendo ai simboli il consueto significato) il lavoro compiuto

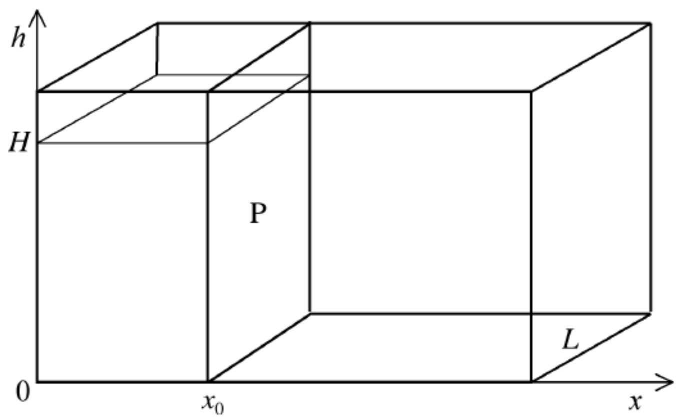

Figura 1. La macchina idraulica. La parete P scorre senza attrito lungo il parallelepipedo.

è $R\Delta T$ e la condizione che, al termine dell'espansione, l'aumento di energia interna sia uguale al lavoro compiuto, ovvero

$$Q = \rho\left(x - x_0\right)LH. \tag{5}$$

si traduce in

$$c_V = R. \tag{6}$$

Il fatto che un gas caratterizzato da calore molare R non esista, non deve impedirci di pensare a tale trasformazione come idealmente possibile.

Per illustrare in maniera analogica questa proprietà Hermann e Hauptmann [7] hanno proposto un apparato meccanico di indubbia efficacia didattica.

L'energia associata all'acqua assorbita nell'espansione è quindi

$$\Delta E = 2\frac{1}{2}QgH = 2\frac{1}{2}\rho\left(x - x_0\right)gLH^2. \tag{7}$$

Nella trasformazione che abbiamo chiamato *adiabatica*, la quantità d'acqua contenuta nel recipiente non cambia, per cui vale una sorta di equazione di conservazione:

$$xh = costante \tag{8}$$

la quale stabilisce che la lunghezza del recipiente è inversamente proporzionale all'altezza del liquido. Nel corso dell'espansione il livello del liquido diminuisce passando, poniamo, da H per la x_i iniziale ad h per la x_f finale. Per la conservazione dell'energia, il lavoro compiuto sarà

$$L_{adiab} = -\Delta U = \frac{1}{2}\rho gL\left(x_i H^2 - x_f h^2\right) \tag{9}$$

a cui, per la (8), possiamo dare la forma

$$L_{adiab} = \frac{1}{2}\rho gL\, x_i H\left(H - h\right). \tag{10}$$

4. Due trasformazioni di seguito

Vogliamo portare il nostro sistema da uno stato caratterizzato da una posizione x_0 e da un livello H ad uno stato caratterizzato dalla posizione x_2 e dal livello h, attraverso due espansioni in serie: una isobara e una adiabatica. Questo richiede che siano accessibili due serbatoi d'acqua con i livelli indicati, ai quali sia possibile connettere la nostra macchina durante le trasformazioni isobare.

Iniziamo dunque con una trasformazione isobara di livello H che porta lo stantuffo dalla posizione x_0 alla posizione x_1 (Fig. 2).

L'espansione sposta la parete mobile dalla posizione x_0 alla posizione x_1, mantenendo costante il livello dell'acqua H.

Il lavoro compiuto nell'espansione è dato dalla (2) dove, al posto di x, va messo x_1. L'energia assorbita è data dalla (7), con la stessa sostituzione.

A questo punto si chiude la comunicazione con il serbatoio e si prosegue l'espansione, che diventa adiabatica, fino a che la parete raggiunge la distanza x_2 (Fig. 3).

Il lavoro compiuto è dato dalla (10) dove, al posto di x_i, bisogna mettere x_1.

Avremmo potuto raggiungere lo stesso stato invertendo l'ordine delle due trasformazioni, ossia facendo un'adiabatica da x_0 ad x_3, seguita da un'isobara da x_3 ad x_2. La posizione x_3 è determinata dal fatto che il livello h dell'acqua sia lo stesso che abbiamo ottenuto nell'espansione precedente, ovvero dovrà essere

$$x_3 h = x_0 H. \tag{11}$$

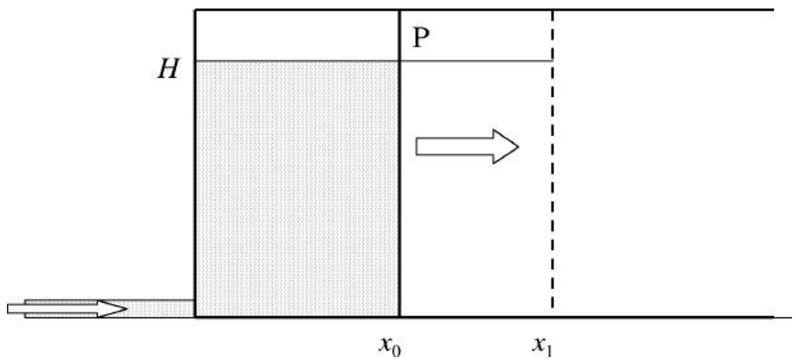

Figura 2. La prima espansione a pressione costante. La parete di sposta da x_0 ad x_1.

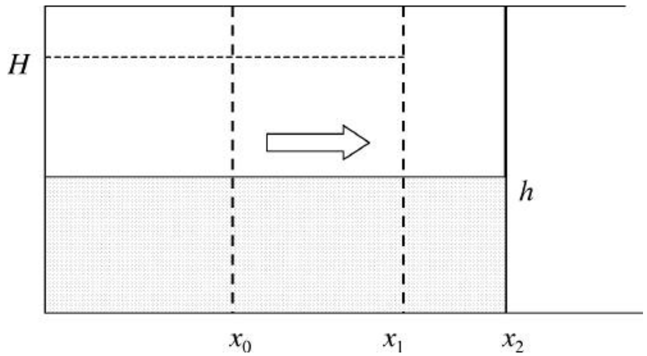

Figura 3. La prima trasformazione isovolumica-adiabatica. Il sistema è isolato e la parete si sposta da x_1 ad x_2.

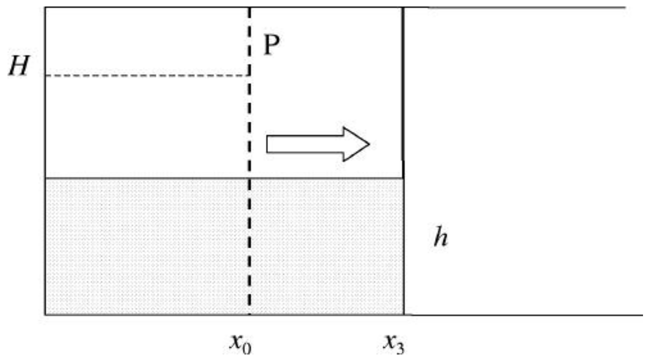

Figura 4. Trasformazione isovolumica-adiabatica dalla posizione x_0 alla posizione x_3.

Per cui

$$x_3 = x_0 \frac{H}{h}. \tag{12}$$

Il lavoro compiuto in questa adiabatica è dato dalla (10) dove, in luogo di x_i è necessario mettere x_0. Infine compiamo un'espansione isobara da x_3 ad x_2. Questa richiede che il sistema venga posto in comunicazione con la grande riserva di livello h. Il lavoro compiuto in questa espansione è descritto dalla (2) che diventa

$$L_{isob} = \frac{1}{2}\rho g L h^2 \left(x_2 - x_3\right). \tag{13}$$

A questa, per la (8) e la (12), si può dare la forma

$$L_{isob} = \frac{1}{2}\rho g L h^2 \left(x_1 \frac{H}{h} - x_0 \frac{H}{h}\right) = \frac{1}{2}\rho g L h H \left(x_1 - x_0\right). \tag{14}$$

Abbiamo invertito l'ordine delle trasformazioni, mantenendo gli stessi stati di partenza e di arrivo.

5. La macchina diventa ciclica

A questo punto pensiamo di sostituire le ultime due espansioni con due compressioni, rispettivamente una isobara da x_2 ad x_3, seguita da una adiabatica da x_3 ad x_0. In questo modo il sistema ritorna nello stesso stato iniziale (Fig. 5).

Naturalmente, il lavoro compiuto nelle compressioni diventa negativo. Quello complessivamente prodotto è allora

$$\begin{gathered} L_{ciclo} = \frac{1}{2}\rho g L\left[H^2\left(x_1 - x_0\right) + x_1 H\left(H-h\right)\right] - \frac{1}{2}\rho g L\left[hH\left(x_1 - x_0\right) + x_0 H\left(H-h\right)\right] = \\ \frac{1}{2}\rho g L\left[2H\left(H-h\right)\left(x_1 - x_0\right)\right]. \end{gathered} \tag{15}$$

Abbiamo già osservato che la massa d'acqua che passa dal serbatoio H al serbatoio h è

$$Q = \rho L H\left(x_1 - x_0\right) = \rho L h\left(x_2 - x_3\right). \tag{16}$$

Il lavoro meccanico prodotto, dato dalla (15), si può esprimere come

$$L_{ciclo} = Qg\left(H-h\right) \tag{17}$$

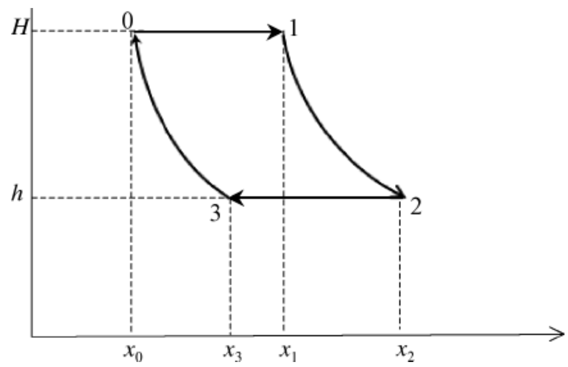

Figura 5. Rappresentazione grafica del ciclo idraulico in un diagramma distanza - livello. I segmenti 1-2 e 3-0 sono archi di iperbole.

che corrisponde all'energia che la massa Q perderebbe passando dalla quota H alla h.

L'energia assorbita nella prima espansione è stata calcolata all'inizio ed è espressa dalla (7); pertanto, il rendimento meccanico del ciclo è

$$\eta = \frac{L_{ciclo}}{\Delta E} = \frac{\rho g L H (H-h)(x_1 - x_0)}{\rho L (x_1 - x_0) h H^2} = 1 - \frac{h}{H}. \tag{18}$$

Il rendimento non dipende dalle variazioni di volume che comportano le singole trasformazioni, ma solo dai livelli dell'acqua nelle due riserve.

Si osservi che la quantità d'acqua che viene prelevata dal primo serbatoio passa integralmente al secondo, cioè il funzionamento della macchina non comporta perdite di alcun genere. Altrettanto bene funzionerebbe come pompa: un esempio di *gedanken maschine* perfettamente reversibile.

6. Sulle analogie

Negli anni '80 H. Fuchs, che collaborava al *Progetto Karlsruhe* per la Didattica della Fisica, pubblicò un godibilissimo articolo sulle analogie tra termodinamica ed elettrostatica [8] in cui presentava un modello di macchina di Carnot di natura elettrostatica: in sostanza, un condensatore a facce piane, poste a distanza variabile, collegabile a due alimentatori caratterizzati da f.e.m. diverse V_1 e V_2. Si dimostrava che il rendimento meccanico della macchina era dato da

$$\eta = 1 - \frac{V_2}{V_1}. \tag{19}$$

Un lavoro analogo comparve qualche anno dopo sul *The Physics Teacher*, per opera di un autore cinese [9].

Nella macchina elettrica l'energia è trasportata dalla carica elettrica che passa dall'uno all'altro generatore e, in una macchina ideale, si conserva. Il lavoro prodotto è proporzionale alla differenza di potenziale tra i generatori. D'altra parte, l'energia contenuta in un condensatore dipende dalla quantità di carica Q e dalla differenza di potenziale V secondo la relazione

$$U = \frac{1}{2} Q V \tag{20}$$

formalmente identica all'espressione dell'energia potenziale di un recipiente che contiene acqua fino ad un livello H:

$$U = \frac{1}{2} Q\, g H \tag{21}$$

dove Q rappresenta la massa dell'acqua che vi è contenuta.

Nella nostra macchina idraulica, l'energia è trasportata dall'acqua e il lavoro prodotto (17) è proporzionale alla massa d'acqua che transita da un serbatoio all'altro e alla differenza tra i due livelli.

Secondo la visione unificante di Karlsruhe [10] l'energia termica passa da un corpo all'altro trasportata da una corrente di entropia. Anzi, in un discorso più ampio, nel *Karlsruhe Physics Project* si identificavano quattro grandezze *substantial-like* – la carica elettrica Q, la quantità di moto p, l'entropia S e la quantità di materia n – a cui corrispondono quattro grandezze intensive coniugate – potenziale elettrico V, velocità v, temperatura T e potenziale chimico μ. Il trasferimento dell'energia è sempre associato ad una corrente di una di queste grandezze *substantial-like*. La potenza elettrica è proporzionale alla corrente, la potenza termica alla corrente di entropia, svolgendo le grandezze coniugate il ruolo di fattori di proporzionalità.

Nel nostro modello il ruolo dell'entropia (o della carica elettrica) è svolto dal volume d'acqua che passa dall'una all'altra riserva e il ruolo della differenza di temperatura (o della differenza di potenziale) dalla differenza di livello tra le due riserve. D'altra parte, l'espressione del rendimento nei tre casi, termodinamico, elettrico ed idraulico, è formalmente identica ed attribuisce lo stesso ruolo a temperatura, potenziale elettrico e livello. Sarebbe forse preferibile parlare, invece che di livelli, di pressione sul fondo – che è proporzionale al livello – il che renderebbe l'analogia ancora più stringente. Infatti, se la temperatura (assoluta) si può intendere come l'energia riferita alla mole, e il potenziale elettrico come l'energia associata all'unità di carica, anche la pressione si può interpretare come l'energia associata all'unità di volume e assume quindi il ruolo di grandezza intensiva coniugata alla massa.

Bibliografia

[1] Herrmann F., "The Karlsruhe Physics Course", *Eur. J. Phys.* **21**, p. 49-58 (2000), http://www.physikdidaktik.uni-karlsruhe.de/.

[2] Schmid G.B., "An up-to-date approach to physics", *Am. J. Phys.* **52**, p. 794 (1984).

[3] Christensen W.M., Meltzer D.E., Ogilvie C.A., "Student ideas regarding entropy and the second law of thermodynamics in an introductory physics course", *Am. J. Phys.* **77**, 10, p. 907 (2009).

[4] Baracca A., "Una proposta di introduzione storica ai concetti entropici", *La Fisica nella Scuola,* XLI, 4, p. 160-166 (2008).

[5] Berra A., Stefanini L., "Condensatore come macchina", *Giornale di Fisica*, XLIII, 1, p. 35-39 (2002).

[6] Goldstein H., *Meccanica classica*, Zanichelli 1971, cap. 3, p. 71.

[7] Hermann F., Hauptmann H., "Understanding the stability of stars by means of thought experiments with a model star", *Am. J. Phys.* **65** (1997).

[8] Fuchs H.U., "A surrealistic tale of electricity", *Am. J. Phys.* **54**, 10, p. 907-909 (1986).

[9] Chen M., "An Electrical Model of a Carnot Cycle", *The Physics Teacher*, **27**, p. 272-273 (1989).

[10] Schmid G.B., "A new approach to traditional physics", *The Physics Teacher*, **24**, p. 349-352 (1986).

Da vent'anni a questa parte le ore di fiato messe sul mercato dai professori secondari sono andate spaventosamente aumentando. Specie nelle grandi città, dalle 10 a 12 ore settimanali, che erano i massimi di un tempo, si è giunti, a furia di orari normali prolungati e di classi aggiunte, alle 15, alle 20, alle 25 e anche alle 30 e più ore per settimana. Tutto ciò può sembrare ragionevole solo ai burocrati che passano 7 od 8 ore del giorno all'ufficio, seduti ad emarginare pratiche. A costoro può sembrare che i professori con le loro 20-30 ore di lezione per settimana e colle vacanze, lunghe e brevi, siano dei perditempo. Chi guarda invece alla realtà dei risultati intellettuali e morali della scuola deve riconoscere che nessuna jattura può essere più grande di questa. La merce «fiato» perde in qualità tutto ciò che guadagna in quantità. Chi ha vissuto nella scuola sa che non si può vendere impunemente fiato per 20 ore alla settimana, tanto meno per 30 ore. La scuola, a volerla fare sul serio, con intenti educativi, logora. Appena si supera un certo segno, è inevitabile che l'insegnante cerchi di perdere il tempo, pur di far passare le ore. Buona parte dell'orario viene perduto in minuti di attesa e di uscita, in appelli, in interrogazioni stracche, in compiti da farsi in scuola, ecc., ecc. Nasce una complicità dolorosa ma fatale tra insegnanti e scolari a far passare il tempo, pur di far l'orario prescritto dai regolamenti e di esaurire quelle cose senza senso che sono i programmi. La scuola diventa un locale, dove sta seduto un uomo incaricato di tenere a bada per tante ore al giorno i ragazzi dai 10 ai 18 anni di età ed un ufficio il quale rilascia alla fine del corso dei diplomi stampati. Scolari svogliati, genitori irritati di dover pagare le tasse, insegnanti malcontenti; ecco il quadro della scuola secondaria d'oggi in Italia. Non dico che la colpa di tutto ciò siano gli orari lunghi; ma certo gli orari lunghi sono l'esponente e nello stesso tempo un'aggravante di tutta una falsa concezione della missione della scuola media.

Luigi Einaudi, "La crisi scolastica e la superstizione degli orari lunghi", *Corriere della Sera*, 21 aprile 1913
http://www.archive.org/stream/gliidealidiuneco00eina#page/22/mode/2up