



Andrea Stefanini

I.T.I.S.
"Galileo Galilei",
Livorno

DVD in caduta

(Pervenuto il 26.1.2010, approvato il 18.2.2011)

ABSTRACT

The fall of a vertical DVD upon a horizontal desk is studied. Different initial conditions are analysed with respect to the static and dynamic friction coefficients and the starting angle. Differential equations of motion are derived and numerical solutions are compared with measurements taken in simple experiments.

1. Introduzione

Quando segue nasce da una domanda che mi ha posto uno studente. Provo a riassumerla così: *Ho un dvd appoggiato su un tavolo come indicato in fig. 1. Lo lascio cadere partendo pressoché da ritto. Quel che osservo è uno scivolamento in avanti del dvd dopo che ha urtato il tavolo. Perché il dvd scivola?*¹

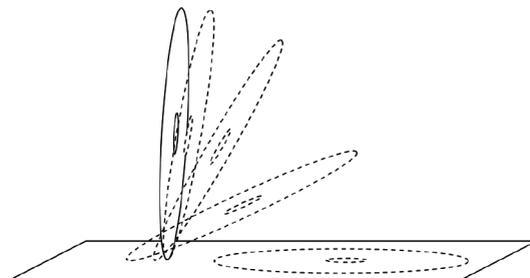


Figura 1. Caduta del dvd: alcuni dettagli osservabili del moto.

Quando ho osservato per la prima volta il comportamento del dvd sono rimasto sorpreso nel vederlo slittare all'indietro per buona parte della caduta e scivolare in avanti dopo l'urto col piano d'appoggio. È stato questo aspetto, all'apparenza paradossale, che ha incuriosito anche lo studente.

La rapidità con cui si susseguono i particolari più significativi del moto di caduta, e il fatto che chi osserva ha la tendenza a porre, istintivamente, l'attenzione sul comportamento del punto di contatto tra dvd e tavolo, piuttosto che su quello del centro di massa del dvd, sono due aspetti che possono rendere inizialmente difficoltosa l'interpretazione di ciò che si sta osservando.

Un ulteriore aspetto che può indurre ad interpretazioni errate è l'evidente presenza di un cuscino d'aria che favorisce lo scivolamento del dvd successivo all'impatto col piano d'appoggio.

Proprio per ricercare ulteriori dettagli del moto ho filmato la caduta del dvd e dal filmato ho estratto i fotogrammi intervallati di 1/25 di secondo. È stato così possibile dedurre che il punto di contatto, tra dvd e tavolo, dapprima si sposta all'indietro e poi in avanti ancor prima che il dvd cada sul tavolo.

Provando ad appoggiare il dvd su superfici diverse è stato possibile osservare che esistono delle condizioni per le quali lo slittamento all'indietro non ha luogo e il disco scivola solo in avanti (e poi, dopo l'urto, continua a scivolare in tale direzione).

Lo studio sistematico del problema ha permesso di mettere a fuoco queste ed altre caratteristiche riguardanti il comportamento del dvd in caduta. Di tutto ciò è data ragione nelle pagine che seguono, il cui contenuto, di conseguenza, va oltre la semplice risposta alla domanda iniziale.

Per controllare la validità degli algoritmi impiegati sono state ideate alcune esperienze volte ad analizzare quantitativamente le predizioni. Questi esperimenti, che hanno la caratteristica di essere relativamente semplici, confermano le previsioni.

Il problema si inquadra in un contesto comprendente fenomeni ampiamente trattati in letteratura (ad esempio la caduta delle ciminiere o di altri oggetti, come una matita) [1] [2] [3] [5].

2. Studio delle fasi iniziali del moto: determinazione delle condizioni di slittamento

Si approssima il dvd in caduta ad un disco omogeneo di spessore trascurabile, raggio $r = 6,0$ cm e massa m .

In fig. 2 il disco in caduta ha un'inclinazione istantanea α rispetto alla verticale. Il suo centro di massa G è sceso verso il basso di un tratto Δh .

Le forze che agiscono sul disco sono il peso \vec{P} e la reazione prodotta dal contatto in O . Quest'ultima è scomponibile nella componente normale alla superficie di contatto (indicata con \vec{N}) e nella componente orizzontale \vec{F} .

Indicando con a_t e a_c le accelerazioni rispettivamente tangenziale e centripeta del c.m. G , le due equazioni di moto relative alla componente radiale e tangenziale del moto di G si possono scrivere così:

$$\begin{cases} P \sin \alpha - N \sin \alpha + F \cos \alpha = ma_t \\ P \cos \alpha - N \cos \alpha - F \sin \alpha = ma_c \end{cases} \quad (1)$$

Non si ha slittamento (all'indietro) del disco in O fin tanto che la componente orizzontale della reazione vincolare (F) non assume il valore massimo della forza di attrito disponibile (kN , dove k è il coefficiente di attrito statico tra le superfici di contatto). Il problema iniziale che si presenta, dunque, è quello di stabilire l'angolo α per il quale inizia lo slittamento del disco. A tale scopo, risolvendo il sistema delle due equazioni, si ottiene:

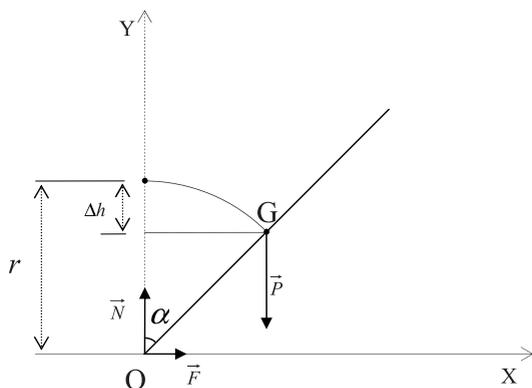


Figura 2. Forze che agiscono sul disco durante la caduta, prima dello scivolamento.

$$F = m(a_t \cos \alpha - a_c \sin \alpha) \quad (2)$$

$$N = P - m(a_t \sin \alpha + a_c \cos \alpha).$$

Riferendo il calcolo del momento delle forze esterne al polo O è possibile ottenere:

$$a_t = \frac{Pr^2}{I_o} \sin \alpha \quad (3)$$

con I_o momento d'inerzia del disco calcolato rispetto a O .

Inoltre, il principio di conservazione dell'energia permette di ricavare: $P\Delta h = \frac{1}{2} I_o \omega^2$, dove ω è la velocità angolare. E, nell'ipotesi che sia $\Delta h = r(1 - \cos \alpha)$, segue:

$$a_c = r\omega^2 = \frac{2Pr^2}{I_o}(1 - \cos \alpha). \quad (4)$$

Tenendo presenti le (3) e (4), considerato che $P = mg$ e che il momento d'inerzia del disco (I_o) è dato da $I_o = I_G + mr^2$, dove $I_G = \frac{1}{4} mr^2$, [4] si ottiene infine:

$$\begin{cases} F = \frac{4}{5} mg (3 \cos \alpha - 2) \sin \alpha \\ N = \frac{mg}{5} [1 + 4(3 \cos \alpha - 2) \cos \alpha] \end{cases} \quad (5)$$

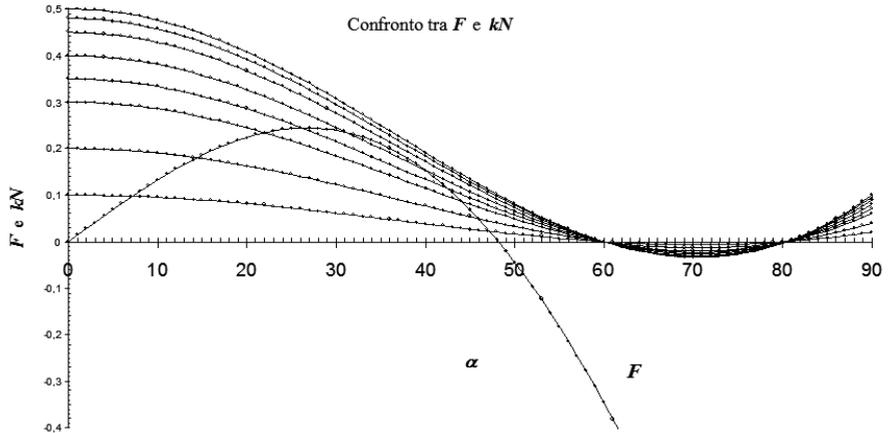


Figura 3.

L'andamento grafico delle relazioni (5) è riportato in fig. 3.

La F si annulla, e successivamente cambia verso, per $\alpha = 48,2^\circ$ ($\cos \alpha = 2/3$). Evidentemente ciò può realmente accadere se prima di tale inclinazione il disco non inizia a slittare.

Quel che interessa, pertanto, è il confronto tra la forza necessaria a mantenere fisso il vincolo (F) e quella massima disponibile (kN). La fig. 3 fornisce le informazioni utili al riguardo. In ordinata sono riportate le due forze da confrontare (è stato assunto quale unità di forza il peso del disco). La famiglia di curve $kN(\alpha)$ è stata ottenuta assegnando a k valori diversi. Si noti che, data l'unità di forza scelta, la forza kN assume il valore k per $\alpha = 0^\circ$. La fase di slittamento inizia nei punti dove la curva $F(\alpha)$ interseca le curve $kN(\alpha)$. Dopo tali punti il significato fisico delle curve è perso.

Volendo dedurre il valore dell'angolo di inclinazione α per cui il disco inizia a slittare (all'indietro) occorre risolvere l'equazione:

$$kN - F = k \frac{mg}{5} [1 + 4(3 \cos \alpha - 2) \cos \alpha] - \frac{4}{5} mg (3 \cos \alpha - 2) \sin \alpha = 0. \quad (6)$$

Dalla fig. 3 è evidente che esiste un valore limite di k (k_{limite}) oltre il quale non si ha slittamento (all'indietro) del disco. Per quel che si può dedurre, sempre dalla fig. 3, tale valore deve essere compreso tra 0,40 e 0,45.

La deduzione per via analitica del valore di k_{limite} si esegue andando a ricercare il valore dell'angolo α per il quale la funzione $f(\alpha) = N/F$ assume il valore minimo. Dedotto $f(\alpha)_{\text{min}}$ si potrà calcolare $k_{\text{limite}} = 1/f(\alpha)_{\text{min}}$.

La condizione di minimo produce $\cos \alpha = (25 \pm \sqrt{79})/42$. Dei due valori di angolo deducibili, $\alpha = 36,21^\circ$ e $\alpha = 67,44^\circ$, solo il primo ha significato fisico nel contesto in esame. Sotto queste condizioni si ottiene $k_{\text{limite}} = 0,42$.

3. Studio della condizione $k > k_{\text{limite}}$: deduzione dell'angolo per il quale inizia lo slittamento in avanti

Se il moto del disco è caratterizzato dalla condizione di lavoro indicata dal titolo allora non si ha lo slittamento all'indietro. In tali circostanze il disco parte e inizia a ruotare attorno ad O: l'attrito tiene fisso il punto di contatto del disco col piano d'appoggio con un'azione diretta a destra di O (fig. 2) e un'intensità giusto uguale a quella di F (intensità richiesta). Quando il disco raggiunge l'inclinazione $\alpha = 48,2^\circ$ ($\cos \alpha = 2/3$) la forza orizzontale per tenere fermo il punto di contatto O assume valore nullo. Da tale angolo di inclinazione in poi la forza richiesta

per mantenere fisso il contatto cambia verso; in fig. 3 ciò è rappresentato dal fatto che la curva $F(\alpha)$ si sviluppa ora per valori negativi.

Tuttavia, sono ancora le intensità di $|F|$ ad interessare. Queste, come si può dedurre dalla fig. 3, assumono ben presto valori maggiori del valore massimo della forza disponibile (kN), segno che il disco inizierà a slittare. Stavolta in avanti.

Volendo conoscere il valore dell'inclinazione α per cui ciò avviene occorre ricercare la condizione per cui è:

$$kN - |F| = 0. \quad (7)$$

Posto $k = 0,48$ la (7) è verificata per $\alpha \approx 51^\circ$.

4. Studio della fase di slittamento

La fase di slittamento è la parte più interessante della caduta del disco e la meno intuitiva. Il suo studio può essere effettuato avvalendosi di una soluzione numerica delle equazioni del moto che verranno stabilite di seguito. Le equazioni (3), (4) e (5), infatti, sono valide solo nell'ipotesi che il punto di contatto disco-tavolo (punto O) sia fisso.

Siano ω e $d\omega/dt$, rispettivamente, la velocità angolare e l'accelerazione angolare del dvd durante lo slittamento.

La somma delle componenti verticali delle forze centripeta [$F_c = mr(d\omega/dt)^2$] e tangenziale [$F_t = mr\omega^2$] deve essere uguale alla risultante delle forze verticali deducibili da un sistema di riferimento inerziale, ad esempio quello solidale al tavolo.

Queste forze sono il peso P e la forza vincolare N . Si ha allora (fig. 4):

$$P - N = mr \frac{d\omega}{dt} \sin \alpha + mr\omega^2 \cos \alpha. \quad (8)$$

L'altra equazione di cui si può disporre è quella che lega la variazione del momento angolare calcolata rispetto al c.m. al momento delle forze esterne che agiscono sul disco. Queste sono il peso del disco P e le due componenti della reazione vincolare prodotta in O: la forza normale N e la forza di attrito dinamico $k_d N$, con k_d coefficiente di attrito dinamico. Rispetto al c.m. solo quest'ultime producono un momento diverso da zero, pertanto è:

$$I_G \frac{d\omega}{dt} = Nr (\sin \alpha - k_d \cos \alpha). \quad (9)$$

Combinando le equazioni (8) e (9) e considerando che è $I_G = \frac{1}{4} mr^2$, si ottiene:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\left(\frac{g}{r} - \omega^2 \cos \alpha\right) (\sin \alpha - k_d \cos \alpha)}{\frac{1}{4} + \sin \alpha (\sin \alpha - k_d \cos \alpha)}. \quad (10)$$

La (10) si presta a fornire la soluzione numerica utile a ricavare tutte le caratteristiche della natura del moto del disco durante la caduta. In essa, se lo slittamento ha luogo in avanti, deve essere cambiato il segno davanti a k_d .

Le informazioni ottenibili sono svariate.

In fig. 5 è riprodotta la traiettoria descritta dal c.m. del disco, durante la fase di slittamento, in tre situazioni diverse (curve a tratto continuo). La curva tratteggiata rappresenta, invece, la traiettoria che il c.m. descriverebbe se il disco fosse incernierato in O. In ognuno dei tre casi il c. m. si sposta su quest'ultima traiettoria fintanto che il punto di contatto O non inizia a slittare.

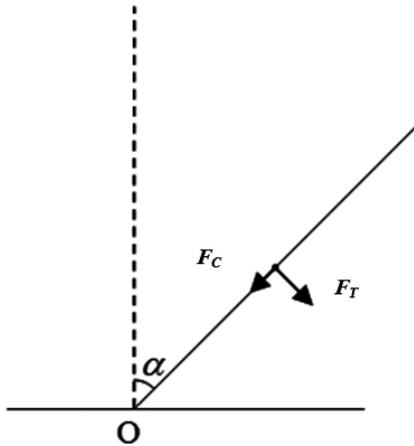


Figura 4. Disco in caduta durante la fase di slittamento: sono evidenziate le componenti centripeta e tangenziale della forza risultante agente sul disco.

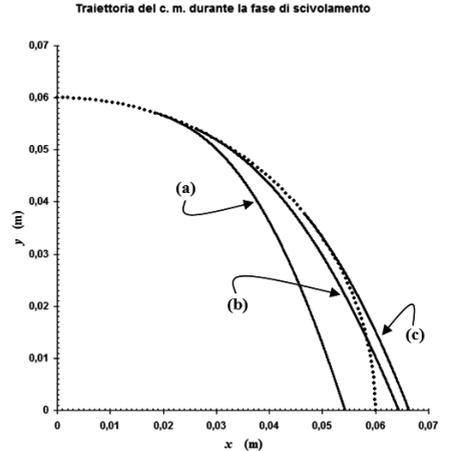


Figura 5. (a) $k = 0,25; k_d = 0,20$
 (b) $k = 0,35; k_d = 0,30$ (c) $k = 0,48; k_d = 0,30$

Le curve (a) e (b) si riferiscono ad una situazione in cui il disco slitta dapprima all'indietro e poi in avanti. La curva (c) è relativa ad una condizione di solo slittamento in avanti. Le differenze sono determinate dalle intensità delle forze di attrito. Il c.m. che descrive la traiettoria (a) si trova sempre dietro alla traiettoria che avrebbe descritto se il vincolo O fosse stato fisso. Nella fase finale tuttavia recupera parte del terreno perso. L'inizio della fase di slittamento ha luogo per un'inclinazione α minore di quella che compete agli altri due casi.

Nella fig. 6 sono riportati tre diagrammi orario relativi ad altrettante condizioni di caduta. In ciascuno di essi è stato ipotizzato che l'inclinazione iniziale sia $\alpha_0 = 1^\circ$.² La traccia continua rappresenta il diagramma orario di un dvd incernierato. Per la sua costruzione è stata impiegata, in un processo di calcolo iterativo, la formula (11), deducibile applicando il principio di conservazione dell'energia al disco in caduta:

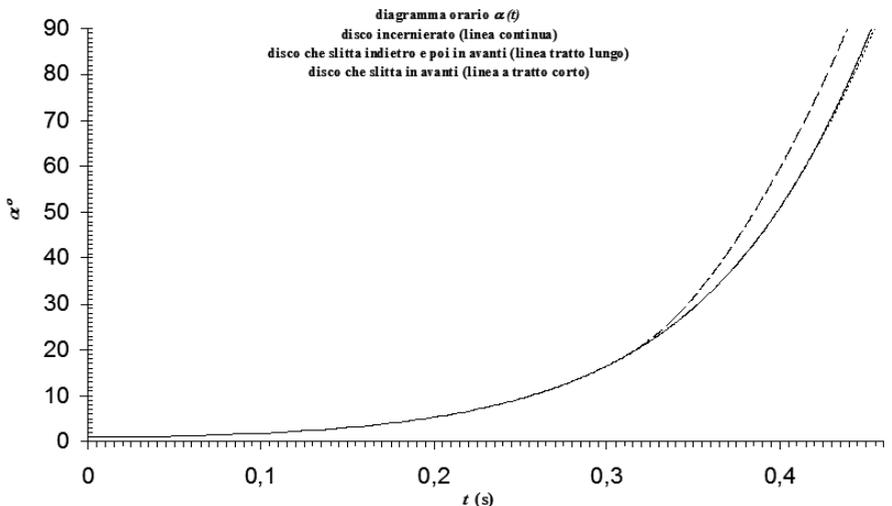


Figura 6.

$$d\alpha = \sqrt{\frac{8g}{5r}(\cos\alpha_0 - \cos\alpha)} dt. \tag{11}$$

La linea a tratto lungo rappresenta il diagramma orario relativo alla caduta con slittamento prima indietro e poi in avanti mentre la linea a tratto corto è il diagramma orario per la caduta di un dvd con slittamento solo in avanti.

Le durate delle tre cadute differiscono di poco. In particolare il diagramma orario relativo alla condizione di solo slittamento in avanti è quasi sovrapponibile a quello del disco incernierato. Ciò è dovuto al fatto che la durata della caduta è determinata prevalentemente dalla fase iniziale di contatto fisso, fase in cui il moto del disco è relativamente lento. Ciò vale anche per la caduta del disco con slittamento nelle due direzioni: la fase di slittamento ha una durata decisamente più breve della precedente di contatto fisso.

Nelle figure 7 e 8 sono riportati gli andamenti della forza normale (N) e della forza di attrito ($k_d N$) in funzione dell'angolo di inclinazione α . In particolare, in fig. 7 è rappresentato il caso in cui lo slittamento ha luogo prima all'indietro e poi in avanti, mentre la fig. 8 è stata dedotta per il solo slittamento in avanti.

Una informazione importante che si può dedurre da entrambe le figure è che l'intensità della forza normale N non assume mai il valore zero: il disco non si stacca mai dal tavolo durante lo slittamento.

Le informazioni di fig. 9 sono fondamentali per interpretare il comportamento del disco dopo l'urto col piano d'appoggio. Infatti, si nota che la componente orizzontale della velocità del c.m., in tale istante, è diversa da zero ed è diretta nel verso assunto come positivo delle ascisse. Le forze di attrito, dunque, producono sul disco un impulso risultante in avanti. La tendenza del disco, quindi, sarà quella di scivolare sul piano d'appoggio subito dopo l'urto.

Si nota come la v_x all'impatto è in pratica determinata dalla situazione al momento dello scivolamento. Nella fase successiva di slittamento la forza di attrito non è più in grado di modificarla sensibilmente.

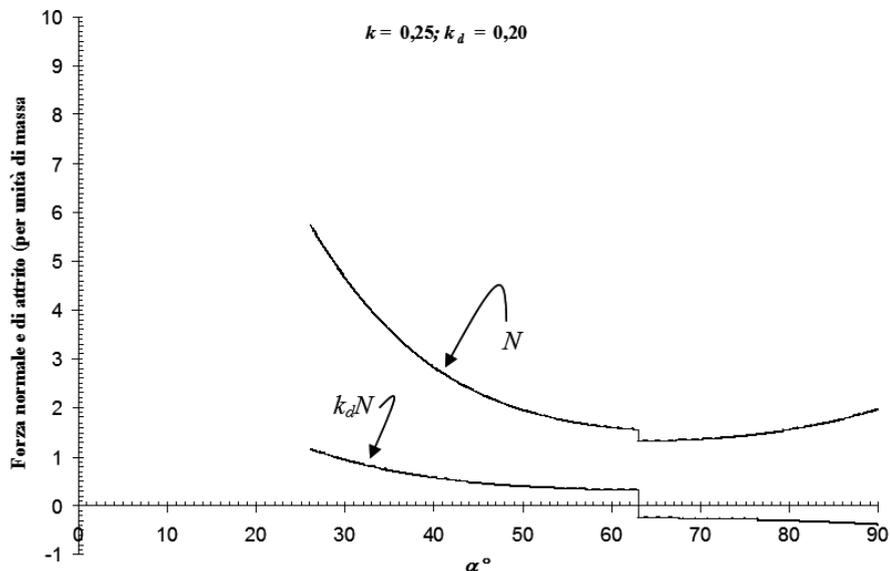


Figura 7. Slittamento indietro e in avanti [caso (a) di fig. 5].

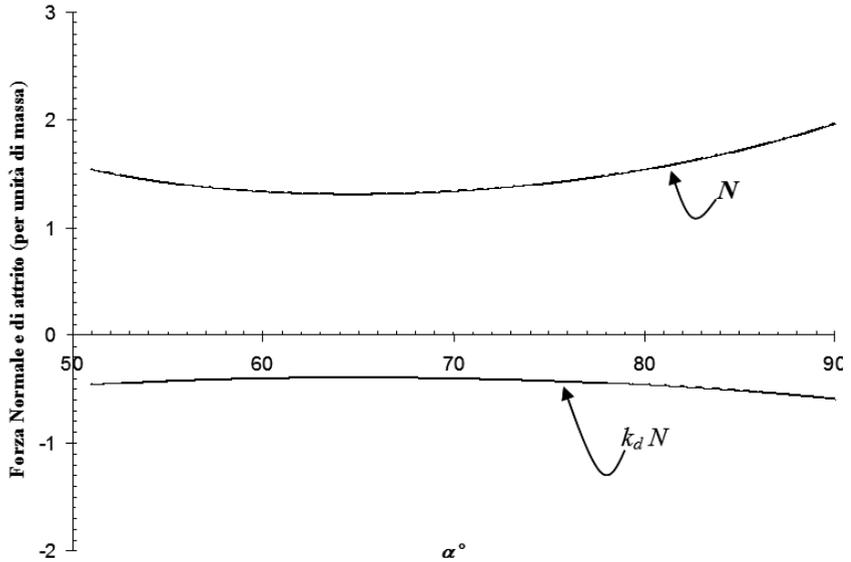


Figura 8. Slittamento solo in avanti [caso (c) di fig. 5].

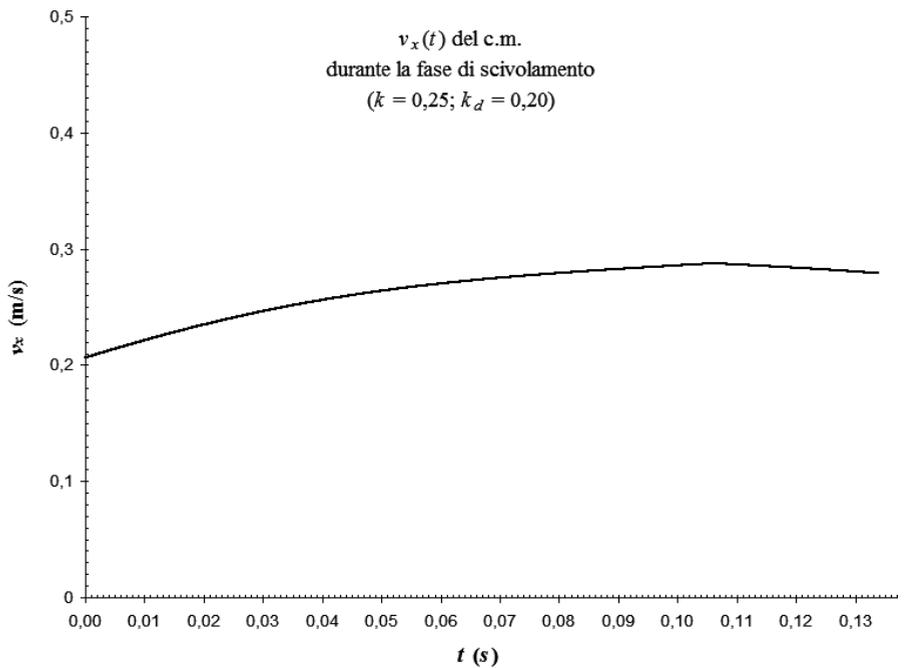


Figura 9.

Se la forza di attrito fosse stata sostituita da una forza capace di garantire il vincolo fisso in O (ad esempio quella esercitata da una cerniera), allora il disco avrebbe urtato il tavolo con la velocità del c.m. diretta perpendicolarmente ad esso.

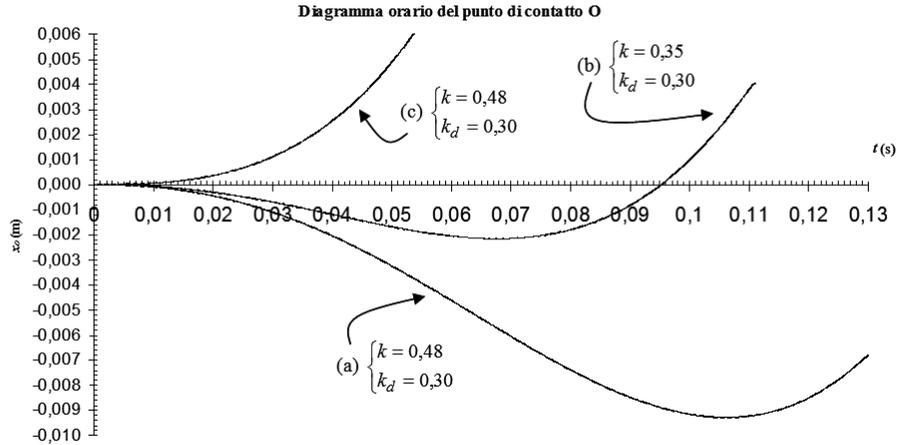


Figura 10.

Per ottenere le figure 5, 6, 7 e 9 è stato necessario stabilire l'istante in cui il punto di contatto inverte il moto di slittamento. In tale istante, infatti, la forza di attrito dinamico cambia verso.

Il moto del punto di contatto, forse, è l'aspetto più curioso di tutto il fenomeno di caduta.

Il rischio che corre chi l'osserva è quello di interpretarlo come il moto di traslazione del disco: il c.m. si comporta in tutt'altro modo.

5. Diagramma orario del punto di contatto

Nota la posizione del c.m. del disco, la determinazione di quella del punto di contatto diviene un problema di geometria.

Siano, per un dato valore dell'angolo di inclinazione α , $G(x_G; y_G)$ e $O(x_O; y_O)$ le posizioni, rispettivamente, del c.m. del disco durante la fase di slittamento e quella simultanea del punto di contatto O.

Poiché la coordinata y_O è sempre uguale a zero, è facile dedurre:

$$x_O = x_G - y_G \cdot \tan \alpha. \tag{12}$$

In fig. 10 è riportato il diagramma orario del punto di contatto O nelle situazioni corrispondenti a quelle di fig. 5. L'istante zero è riferito all'inizio dello slittamento. Le curve si arrestano nell'istante in cui il dvd urta il tavolo.

Si vede che il primo millimetro di slittamento ha luogo in un intervallo di tempo di circa 3 centesimi di secondo. Inoltre, la fase di slittamento ha una durata complessiva molto breve e ciò impedisce all'occhio di riuscire a coglierne tutti i particolari. È tuttavia possibile filmare la caduta ed estrarre i fotogrammi dal filmato. Questi risulteranno intervallati di 1/25 di secondo e non potranno, perciò, offrire informazioni dettagliate sul moto tanto da poter fare delle misure. Il loro utilizzo può tuttavia essere prezioso per un'analisi qualitativa.

6. Previsioni e controlli sperimentali

Arrivati a questo punto occorre controllare la validità delle previsioni ottenute con gli algoritmi. Un controllo sperimentale può essere facilmente condotto per lo scivolamento in avanti, vista la natura relativamente semplice del moto. Per questo scopo il disco viene appoggiato su un foglio di carta in modo che il valore del coefficiente di attrito sia tale da consentire solo la fase di scivolamento in

avanti durante la caduta. Il valore del coefficiente di attrito statico è stato misurato col metodo del piano inclinato: $k = 0,48$. La fase di slittamento ha inizio per $\alpha \approx 51^\circ$. In tale istante il disco ha una velocità angolare $\omega \approx 9,85$ rad/s.

Con questi valori previsti, e assegnando al coefficiente di attrito dinamico k_d alcuni valori compresi tra 0,2 e 0,45, si ottengono le previsioni relative alla posizione del c.m. al momento dell'urto del disco col tavolo (quarta colonna della Tabella 1). Da esse è possibile prevedere il valore del tratto di slittamento in avanti del punto di contatto O al momento dell'impatto (Δx_o , quinta colonna della Tabella 1).

L'altra informazione che fornisce la possibilità di un controllo sperimentale è contenuta nel valore della componente orizzontale della velocità del c.m. Conoscendo tale valore risulterà possibile prevedere il tratto di slittamento successivo all'impatto (s). Dal teorema dell'energia cinetica, infatti, si ha:

$$s = \frac{v_x^2}{2gk_d}. \quad (13)$$

Tale distanza risulta misurabile.

Le previsioni dei valori delle grandezze misurabili sono riassunte nella Tabella 1 (si deve ricordare che il raggio r del dvd è 6,0 cm).

k_d	v_x (m/s)	s (cm)	x c.m. (cm)	Δx_o (mm)	Posizione del bordo anteriore del dvd al momento dell'impatto (cm)
0	0,37	×	6,7	7,1	12,7
0,20	0,36	3,2	6,7	6,6	12,7
0,30	0,35	2,1	6,6	6,4	12,6
0,40	0,34	1,5	6,6	6,2	12,6
0,45	0,34	1,3	6,6	6,1	12,6

Tabella 1. Previsioni numeriche delle grandezze misurabili nel caso di solo slittamento in avanti

7. Strategia di lavoro e controlli sperimentali

Primo controllo: *misura dello spostamento in avanti al momento dell'impatto.*

Questa previsione si controlla abbastanza bene usando un cartoncino appoggiato sul foglio di carta in modo da avere rispettate le seguenti condizioni:

- il bordo del cartoncino sia posto alla distanza prevista nella quinta colonna della Tabella 2 dal punto iniziale O;
- tale bordo risulti perpendicolare al piano della traiettoria del c.m.

Se il disco in caduta si comporta diversamente da quanto previsto si possono presentare due scenari alternativi.

- 1) La fase di slittamento è inferiore a quella prevista: quando il disco atterra il suo bordo anteriore si trova ancora distante dal bordo-traguardo del cartoncino. L'orecchio percepisce (anche in rapida successione) prima il rumore dovuto all'impatto col tavolo e poi quello prodotto dall'urto col bordo (in conseguenza del quale il dvd è visto rimbalzare all'indietro).
- 2) La fase di slittamento ha una lunghezza maggiore di quella prevista: il disco atterra in parte anche sul cartoncino e scivola oltre. L'orecchio percepisce solo il rumore dovuto all'impatto col tavolo.

Se invece il disco si comporta come previsto, allora, il rumore dovuto all'impatto col tavolo e quello dovuto all'urto col bordo del cartoncino sono praticamente indistinguibili.

Sono state condotte diverse prove riducendo gradualmente la distanza tra il punto di contatto iniziale O e il bordo del cartoncino. Per distanze superiori a 12,6 cm è stato osservato il comportamento previsto al punto 1. L'intervallo di tempo tra i due urti percepiti andava gradualmente riducendosi in modo avvertibile all'avvicinarsi del punto O al bordo del cartoncino. Per distanze inferiori a 12,6 cm il disco urtava il cartoncino da sopra. Il risultato è ben riproducibile con una incertezza sperimentale di ± 1 mm.

Secondo controllo: *misura dello spostamento in avanti successivo all'impatto.*

Si dà luogo al processo di caduta, avendo cura di riferirlo sempre allo stesso punto di contatto iniziale O.

Si determina la distanza da O del bordo posteriore (rispetto al senso di scorrimento) del disco dopo che ha raggiunto la quiete. Si ripete più volte la misura.

Sottraendo, alla distanza media ottenuta, i 6 mm relativi allo scorrimento antecedente all'impatto, si ottiene la misura di s .

Mediando su 30 prove è risultato $s_m \approx 2$ cm. Le condizioni di rilascio del dvd sembrano essere responsabili delle fluttuazioni osservate.

Secondo quanto è stato previsto in Tabella 1 il valore di k_d deducibile è compreso tra 0,2 e 0,3.

Ma lo slittamento dopo l'impatto sembra avere le caratteristiche più di una planata che non quelle dello scorrimento tra due corpi solidi. In sostanza, da quel che si può osservare sembra che tra disco e tavolo si formi un cuscino d'aria che protrae più a lungo la fase di scivolamento successiva all'urto.

Il dvd stesso offre la possibilità di controllare questa affermazione.

Nelle prove condotte la superficie del dvd che urtava il tavolo è stata sempre quella non registrabile.

La superficie registrabile presenta un collare rialzato, concentrico al bordo del dvd. Rispetto alla superficie del dvd il collare emerge di 0,20 mm (calibro ventesimale).

	k_d	Posizione x del c.m. al momento dell'impatto (cm)	Spostamento Δx_o massimo all'indietro del punto di contatto O (mm)	Posizione del bordo anteriore del dvd al momento dell'impatto (cm)
$k = 0,20$ ($\alpha_o = 14,4^\circ$; $\omega_o = 2,87$ rad/s)	0,10	4,3	-19	10,3
	0,15	4,7	-15	10,7
$k = 0,25$ ($\alpha_o = 18,2^\circ$; $\omega_o = 3,62$ rad/s)	0,10	4,8	-14	10,8
	0,15	5,1	-12	11,1
	0,20	5,4	-9	11,4
$k = 0,30$ ($\alpha_o = 22,0^\circ$; $\omega_o = 4,37$ rad/s)	0,15	5,4	-9	11,4
	0,20	5,7	-7	11,7
	0,25	6,1	-4	12,1
$k = 0,35$ ($\alpha_o = 26,2^\circ$; $\omega_o = 5,18$ rad/s)	0,15	5,9	-5	11,9
	0,25	6,2	-3	12,2

Tabella 2. Previsioni numeriche delle grandezze misurabili nel caso di slittamento prima indietro e poi in avanti.

L'idea è quella di far cadere tale superficie sul tavolo: la presenza del collare dovrebbe impedire il formarsi del cuscino d'aria sotto il disco. In effetti, si nota uno spostamento s sensibilmente minore (poco più della metà) di quello ottenuto in precedenza.

8. Controllo sperimentale per la condizione di slittamento indietro e in avanti

Con la tecnica del cartoncino si possono dedurre il massimo valore dello spostamento all'indietro del punto di contatto O e la posizione del c.m. (o quella del bordo anteriore del dvd) al momento dell'impatto del dvd col tavolo. In Tabella 2 sono riportati alcuni valori relativi alle previsioni.

Il controllo sperimentale è stato effettuato appoggiando il dvd su un raccogliatore (busta) di fogli per i quaderni ad anelli (nella busta è stato inserito qualche foglio per "stirarla").

È risultato $\Delta x_o = -12$ mm, mentre il bordo anteriore del dvd si trovava a 11,0 cm dal punto di contatto O iniziale. Ciò ha lasciato presupporre che il coefficiente di attrito statico fosse $k = 0,25$ e quello dinamico $k_d = 0,15$.

I risultati ottenuti sono abbastanza riproducibili (occorre far attenzione alla manipolazione del dvd al momento del rilascio).

Per controllare l'attendibilità dei risultati ottenuti è stato misurato il coefficiente di attrito statico tra le due superfici col metodo del piano inclinato, ottenendo $k = 0,26$.

9. Dipendenza della condizione di slittamento dall'angolo di inclinazione iniziale

Questo problema è stato studiato limitatamente alla condizione $k > k_{\text{limite}}$. Nelle previsioni stabilite in precedenza è stato ipotizzato che il disco partisse da una posizione pressoché verticale ($\alpha \approx 0^\circ$). La questione che si pone ora è quella di capire se un angolo α sensibilmente maggiore di zero comporta delle alterazioni importanti nei valori prevedibili e misurabili.

Sia α_o l'inclinazione iniziale del dvd. Vediamo cosa cambia. Intanto deve essere modificata la (4):

$$a_c = r\omega^2 = \frac{2Pr^2}{I_o} (\cos\alpha_o - \cos\alpha) \quad (4\text{bis})$$

In conseguenza di ciò cambiano pure le (5) e la (6).

In esse le parentesi $(3\cos\alpha - 2)$ debbono essere sostituite con $(3\cos\alpha - 2\cos\alpha_o)$.

Studiando la condizione di slittamento del dvd su carta ($k = 0,48$) è stato possibile prevedere che per valori di α_o minori di 21° la forza massima disponibile (kN) risulta sempre maggiore della forza necessaria (F) ad impedire lo slittamento all'indietro. Oltre tale angolo di inclinazione iniziale il dvd inizia a cadere e successivamente a slittare all'indietro (e poi in avanti).

In ogni caso, per $\alpha_o < 21^\circ$ il dvd slitta in avanti e la posizione del suo c.m. (o del bordo anteriore), al momento dell'impatto col tavolo, è possibile prevederla con la seguente procedura: 1) si fissa il valore di α_o ; 2) si deduce l'angolo di inizio slittamento; 3) mediante il principio di conservazione dell'energia si deduce la velocità angolare del dvd all'inizio dello

	α_o	x c.m. (cm)
$k_d = 0,15$	5°	6,6
	10°	6,6
	15°	6,6
	20°	6,6
$k_d = 0,30$	5°	6,6
	10°	6,6
	15°	6,6
	20°	6,5

Tabella 3. Previsioni numeriche delle grandezze misurabili nel caso di solo slittamento in avanti e inclinazione iniziale, del dvd, grande.

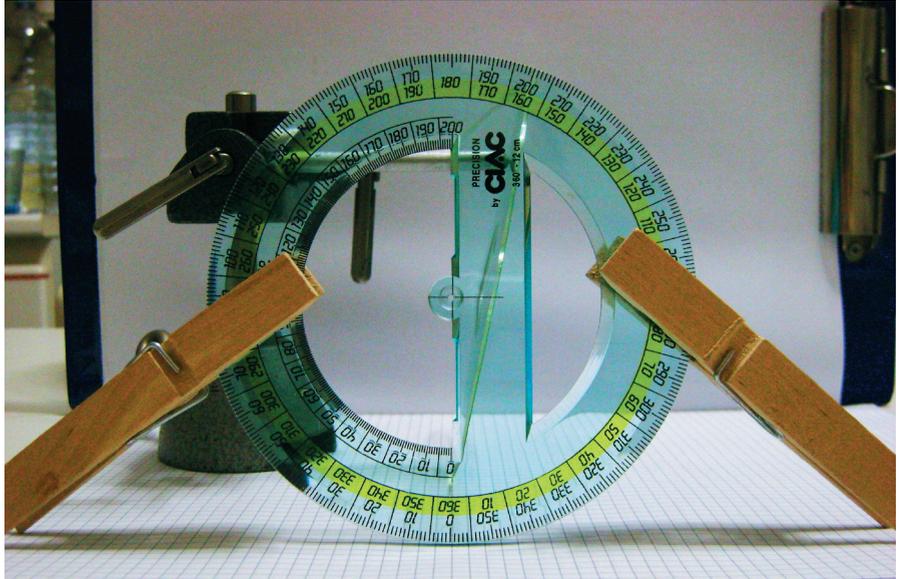


Figura 11. Dispositivo per la misura dell'inclinazione iniziale del dvd.

slittamento; 4) con gli ultimi due valori si inizializza il processo di calcolo che fa uso della (10) e si ricava la posizione del c.m. all'impatto. I risultati ottenuti sono riportati in Tabella 3. Il calcolo è stato effettuato ipotizzando un $k_d = 0,15$ e ripetuto per $k_d = 0,30$.

Si vede come lo spostamento del c.m., stavolta, non dipende praticamente dall'inclinazione iniziale e dal coefficiente di attrito dinamico.

10. Controlli sperimentali

Per controllare le ultime previsioni effettuate (valore dell'inclinazione iniziale del dvd per il quale esso slitta all'indietro sulla carta e le altre contenute nella Tabella 3) è stato montato il dispositivo riprodotto in fig. 11.

Lo zero del goniometro e il dvd sono appoggiati sulla stessa linea della carta quadrettata. Il dvd si intravede dietro al goniometro. Lo stativo è servito a sorreggere il dvd al momento della foto. Studiando la geometria del dispositivo è facile convincersi che l'inclinazione iniziale del dvd è pari alla metà dell'angolo letto sullo strumento. Nel caso rappresentato in figura l'angolo è prossimo a 10° .

La posizione del bordo anteriore del dvd si rileva col solito metodo del cartoncino.

Le misure effettuate sono risultate in accordo con le previsioni.

11. Conclusioni

Sono ora note le cause che determinano il comportamento del dvd durante la caduta. All'inizio si limita a ruotare con il fulcro nel punto di contatto. Alla forza di attrito è relegato il compito di mantenere fisso il contatto. Ben presto l'attrito non è più in grado di svolgere questa azione e il disco inizia a slittare.

In tale istante il c.m. del disco ha una componente orizzontale della q.d.m. che la successiva fase di slittamento in avanti riesce a ridurre solo di poco.³ Quando il disco urta il tavolo gli effetti di questa q.d.m. orizzontale residua si traducono nella fase di scivolamento osservabile.

Tale slittamento sembra essere influenzato dal cuscino d'aria che si instaura sotto al dvd al momento dell'impatto.

Quando ho cercato di analizzare il comportamento del dvd con lo studente che mi aveva sottoposto il problema (all'epoca frequentava la terza classe dell'indirizzo elettronici dell'ITI, pertanto aveva interrotto lo studio curricolare della fisica in seconda) ho dato risalto agli aspetti di metodo piuttosto che ai particolari di alcuni passaggi teorici, che richiedono una preparazione in fisica di tipo più avanzato.

- Posso riassumere gli aspetti salienti di questa impostazione nei seguenti punti:
- Osservazione del fenomeno e ricerca degli aspetti significativi che portano a formulare i primi tentativi di spiegazione.
 - Uso del supporto tecnologico per estendere la possibilità dell'indagine oltre il limite della percezione visiva.
 - Definizione di un modello fisico coerente con l'osservazione e avente potere predittivo.
 - Uso del software (nel nostro caso *Excel*) per la soluzione numerica delle equazioni del moto. In particolare ho posto l'attenzione sul fatto che non sempre è consentita una soluzione analitica delle equazioni che permettono di descrivere il fenomeno studiato.
 - Necessità di un controllo sperimentale delle previsioni dell'impianto di calcolo e del modello fisico su cui si basa.
 - Progettazione e realizzazione delle esperienze.
 - Deduzioni finali.

Bibliografia

- [1] E. L. MADSEN, "Theory of the chimney breaking while falling", *Am. J. Phys.* **45**, 182-184 (1977).
- [2] G. VARESCHI, K. KAMLYA, "Toy models for the falling chimney", *Am. J. Phys.* **71**, 1025-1031 (2003).
- [3] R. CROSS, "The fall and bounce of pencil and other elongated objects", *Am. J. Phys.* **74**, 26-30 (2006)
- [4] D. HALLIDAY, R. RESNICK, *Fisica*, Casa Editrice Ambrosiana, Milano, 1978, Vol. 1, Cap. 12.

Web Link

- [5] <http://www.physics.usyd.edu.au/~cross/PUBLICATIONS/>

Note

- ¹ Per osservare questo effetto occorre che ad urtare il tavolo sia la faccia non registrabile del dvd.
- ² Per $\alpha_0 = 0$ il momento risultante delle forze che agiscono sul disco è zero. In tali condizioni si avrebbe un tempo di caduta tendente a infinito. Il valore $\alpha_0 = 1^\circ$ è stato scelto per coniugare l'esigenza di un tempo di caduta finito con l'altra, ipotizzata sin qui, di far partire il dvd "praticamente" verticale.
- ³ Questo perché la fase in cui la forza di attrito è diretta in senso opposto alla componente orizzontale del moto del dvd ha una durata molto breve rispetto a quella in cui i versi sono concordi (vedi la fig. 7). Inoltre, anche la forza di attrito (sia dinamico che statico) ha una intensità più piccola in tale fase.

COLLABORATORI ESTERNI

Ringrazio, anche a nome del Gruppo Redazionale, gli autori e tutti coloro che, a vario titolo, hanno collaborato alle pubblicazioni dell'anno 2010, in particolare: Carlo Bernardini, Luigi Brasini, Gianluca Cruciani, Giuseppe Giuliani, Alberto Meroni, Giovanni Vittorio Pallottino, Mirella Rafanelli, Maurizio Recchi, Carla Romagnino, Ruggero Stanga.