



Marco Portioli

Classe 5<sup>a</sup> C PNI  
Liceo Scientifico  
"Belfiore", Mantova

# Cogliere la realtà in movimento: il software Tracker

(Pervenuto il 15.10.2009, approvato il 18.2.2011)

## ABSTRACT

Tracker is a free software that allows to study the trajectory of any moving object by analysing a video. Using this software to study the parabolic motion of balls in sports such as table tennis and basketball the pupils can learn how to enhance their performance as players while enjoying physics.

## 1. Introduzione

A scuola solitamente si studia la cinematica sul libro e in laboratorio, ricostruendo artificialmente il fenomeno naturale con una strumentazione talvolta complessa. Per invogliare gli studenti nel collegamento tra fenomeni quotidiani e fenomeni "fisici", propongo l'utilizzo del software *Tracker*<sup>1</sup>, un ponte utile e divertente tra lo studio scolastico e l'interesse sportivo.

È sufficiente una ripresa video e il programma è in grado di estrapolare dati interessanti e di fornirne una significativa analisi quantitativa.

Mostrerò inizialmente il funzionamento di Tracker in un classico esperimento di laboratorio sul moto di due palline e, in seguito, analizzerò la traiettoria della palla nel ping pong e nel basket.

## 2. Istruzioni per l'uso e Esperimento 1

Si filma il moto di caduta di due palline dalla stessa altezza e nello stesso istante: una viene lasciata cadere, l'altra abbandona, con una certa velocità orizzontale e nello stesso momento, una guidovia.

Tracker estrapola dal video i fotogrammi e l'utente può marcare l'oggetto in moto con un punto di massa, scegliendo dal pannello *Controllo traccia: nuovo: punto di massa* e poi ripetendo in ogni fotogramma *maiusc-clic* per segnarlo. La nuova versione di Tracker include anche l'opzione *autotraccia* che marca automaticamente il moto dell'oggetto selezionato nel primo fotogramma.

Fissati un sistema cartesiano ortogonale monometrico e un campione per le lunghezze con l'opzione *metro a nastro*, Tracker può visualizzare grafici e tabelle di spostamento, tempo e numerose grandezze derivate. Nell'esempio in Figura 1 il riferimento per le distanze reali, marcato con il metro a nastro, è la lunghezza nota (20 cm) dell'asta orizzontale che regge il magnete da cui si stacca la pallina a caduta verticale.

Si possono visualizzare contemporaneamente più grafici nello stesso piano cartesiano: ad esempio in Figura 2 sull'asse delle ordinate sono poste la componente orizzontale e quella verticale del moto, sull'asse delle ascisse è posto il tempo.

Confrontando i due grafici nelle Figure 2a, 2b si nota che entrambe le componenti verticali hanno andamento parabolico e che i due *fit* assumono circa gli

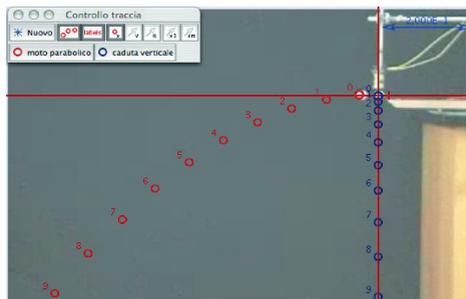


Figura 1. Confronto dei punti di massa dei due moti. L'origine degli assi cartesiani è posta in corrispondenza del primo punto di massa della caduta verticale.

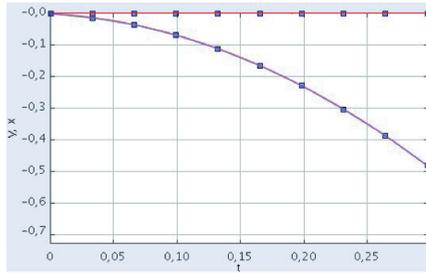


Figura 2a. Pallina lasciata cadere: andamento rettilineo del grafico dello spostamento orizzontale (sempre nullo) in funzione del tempo; andamento parabolico dello spostamento verticale in funzione del tempo.

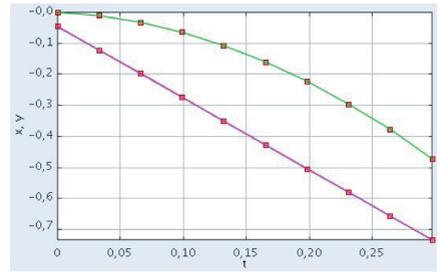


Figura 2b. Pallina che abbandona la guidovia.

stessi valori per i parametri  $a$ ,  $b$ ,  $c$  nell'equazione  $y = at^2 + bt + c$ . In particolare il valore di  $a$  ( $-4,903 \text{ m/s}^2$  per la caduta verticale e  $-4,866 \text{ m/s}^2$  per il moto parabolico) è un'ottima approssimazione di  $-g/2$ , coefficiente di  $t^2$  nell'equazione della componente verticale:

$$y = -\frac{1}{2}gt^2. \quad (1)$$

Inoltre la maggior parte dei valori dell'accelerazione istantanea registrati nelle Tabelle 1a, 1b è molto prossima a quello di  $g$ . In accordo con la (1), le equazioni dei *fit* hanno valori di  $b$  e  $c$  prossimi a 0.

Lo spostamento orizzontale, invece, differenzia i due moti: è nullo se la palla cade da ferma, è rettilineo uniforme se il moto è parabolico. La pendenza della retta del grafico 2b fornisce il valore della velocità orizzontale costante, pari a  $2,4 \text{ m/s}$ .

caduta verticale					
t	x	y	vx	vy	a
0	0	-0,002			
0,033	0	-0,015	0	-0,543	
0,066	0	-0,038	0	-0,853	9,628
0,099	0	-0,072	0	-1,19	10,091
0,132	0	-0,116	-0	-1,514	9,508
0,165	-0	-0,172	0	-1,823	10,172
0,198	0	-0,236	0	-2,171	9,62
0,231	0	-0,315	0	-2,483	9,867
0,264	0	-0,4	0	-2,793	
0,297	0	-0,499			

moto parabolico					
t	x	y	vx	vy	a
0	-0,044	0,002			
0,033	-0,122	-0,01	-2,4	-0,514	
0,066	-0,203	-0,032	-2,439	-0,848	10,133
0,099	-0,283	-0,066	-2,439	-1,183	9,859
0,132	-0,364	-0,11	-2,43	-1,499	9,498
0,165	-0,443	-0,165	-2,421	-1,808	9,989
0,198	-0,524	-0,23	-2,381	-2,151	9,213
0,231	-0,6	-0,307	-2,393	-2,433	9,769
0,264	-0,681	-0,39	-2,415	-2,763	
0,297	-0,76	-0,489			

Tabelle 1a, 1b. Confronto dati dei moti delle due palline: tempo, spostamento orizzontale e verticale, velocità orizzontale e verticale, accelerazione (in unità S.I.). Tracker non calcola l'ultimo valore della velocità e dunque gli ultimi due valori dell'accelerazione.

### 3. Fare sport con Tracker: ping pong

Servendomi di Tracker, ho analizzato il moto della palla per alcuni colpi fondamentali con l'obiettivo di comprendere se il lancio con velocità obliqua segue una traiettoria parabolica. Ho inoltre studiato come la rotazione della palla "tagliata" influisca sul moto della pallina da ping pong.

Nello studio del colpo<sup>2</sup> in Figura 3, analogamente al primo esperimento, l'origine degli assi cartesiani viene posta idealmente al centro della pallina nel primo fotogramma.



Figura 3. Moto della pallina marcato con punti di massa. L'unità di misura è la lunghezza del tavolo, pari a 2,74 m.

L'analisi delle componenti della traiettoria, visualizzate nel grafico in Figura 4, conferma l'ipotesi di moto parabolico. Infatti i dati del grafico  $x - t$  seguono il *fit* retta, tipico del moto rettilineo uniforme orizzontale, mentre il grafico  $y - t$  si adatta al *fit* parabola: il moto verticale è uniformemente accelerato. Come nell'analisi del moto di caduta di due palline, dal valore del parametro  $a$  del *fit* di  $y - t$  si deduce che l'accelerazione media del percorso è un'ottima approssimazione di  $g$ :

$$-2 (-4,893) \text{ m/s}^2 = 9,786 \text{ m/s}^2 .$$

La Figura 5 è particolarmente significativa per due motivi: evidenzia l'andamento parabolico della traiettoria effettivamente seguita dalla palla e l'estrapolazione degli ultimi cinque dati mostra la rilevanza dell'effetto Magnus<sup>3</sup> nel ping pong.

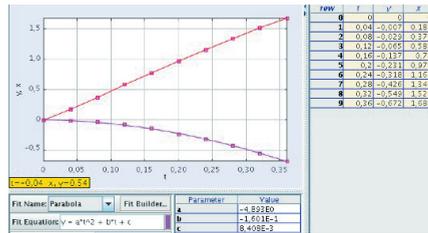


Figura 4. Grafici spostamento orizzontale - tempo e spostamento verticale - tempo.

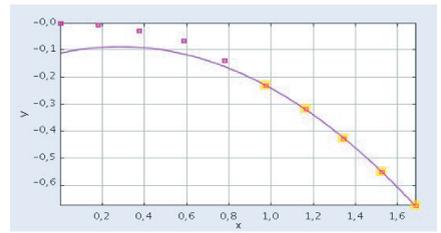


Figura 5. Disposizione reale dei punti di massa nel grafico  $y - x$ . Estrapolazione degli ultimi 5 dati.

#### 4. L'effetto Magnus

Infatti, nell'ultimo tratto, la pallina ruota con velocità inferiore a causa della resistenza dell'aria e la curva derivante dall'estrapolazione ha altezza massima inferiore rispetto alla traiettoria reale: l'effetto Magnus causa l'innalzamento della palla e può essere valutato grazie alla formula di Kutta-Joukowski:

$$F = \frac{1}{2} \rho v_x^2 S C_L \quad (2)$$

ove  $F$  è la forza di Magnus,  $\rho$  è la densità dell'aria,  $v_x$  è la velocità orizzontale del moto,  $S$  è la sezione della pallina e  $C_L$  è il *lift coefficient*, legato al materiale della pallina e alla rotazione impressale. Dalla pendenza del grafico  $x - t$  si ricava che la velocità orizzontale media è 4,747 m/s; la pallina da ping pong nel filmato ha diametro regolamentare pari a 40 mm e  $C_L$  compreso tra 0,2 e 0,6.<sup>4</sup> Dunque, assumendo  $\rho = 1,29 \text{ kg/m}^3$  si ricava che  $0,003 \text{ N} \leq F \leq 0,01 \text{ N}$  paragonabile al peso della pallina, pari a 0,025 N.

L'incidenza di questo effetto è fondamentale in molti altri sport: per esempio, a pallavolo, nella battuta in salto, si imprime rotazione antioraria per far salire la palla più del previsto e farla scendere improvvisamente, mentre nella schiacciata si tende a imprimere rotazione opposta per velocizzare la fase discendente e rendere difficoltosa la ricezione.

### 5. A canestro con Tracker

Ho realizzato questo filmato con l'intento di valutare quali fattori incidono maggiormente sulla riuscita di un tiro a canestro.

Tracker svolge un ruolo significativo permettendo di comprendere meglio la tecnica di tiro alla luce dei dati quantitativi rilevati.

In Figura 7 la palla è lanciata con velocità iniziale  $v_0$ , inclinata rispetto all'asse  $x$  di un angolo acuto  $\alpha$ ;  $\beta$  è l'angolo di entrata a canestro (angolo acuto tra la tangente nel punto di entrata a canestro e l'asse  $x$ ). L'origine del sistema cartesiano è stata posta in corrispondenza con il primo punto di massa analizzato (momento di lancio della palla), la distanza tra il giocatore e il canestro è chiamata  $L$ , la variazione in ordinate tra l'altezza del canestro e l'origine è chiamata  $h$ ; il riferimento per le lunghezze è il diametro della palla (regolamentare), pari a 24,6 cm.

I grafici  $x - t$  e  $y - t$  seguono l'andamento caratteristico del moto parabolico. In particolare, il valore del parametro  $a$  del *fit* parabolico nel grafico  $y - t$  è pari a  $-4,944 \text{ m/s}^2$ , buona approssimazione di  $-g/2$ . Dalla pendenza del *fit* rettilineo del grafico  $x - t$  si ricava invece il valore di  $v_{0x} = v_0 \cos \alpha = 4,401 \text{ m/s}$ , velocità orizzontale costante e fondamentale per l'analisi quantitativa del tiro in Figura 7.

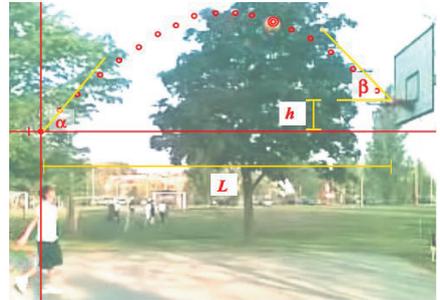


Figura 7. Analisi del tiro a canestro con punti di massa ed elementi considerati.

### 6. Il sistema per fare canestro

Dall'osservazione dei grafici si deduce che il tiro a canestro può essere espresso attraverso l'equazione della traiettoria parabolica:

$$\begin{cases} x = v_0 t \cos \alpha \\ y = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases} \Rightarrow y = -\frac{g}{2(v_0 \cos \alpha)^2} x^2 + \tan \alpha x. \quad (3)$$

Affinché il tiro abbia successo, il punto C ( $L, h$ ) in cui il centro della palla si trova all'interno dell'anello del canestro deve appartenere alla parabola (3). Ricavando  $v_0$  dalla (3) per  $x = L, y = h$  si ottiene:

$$v_0^2 = f(\alpha) = \frac{gL}{2 \cos^2 \alpha \left( \tan \alpha - \frac{h}{L} \right)}. \quad (4)$$

La (4) mostra che per ogni posizione, essendo determinati  $h$  e  $L$  ma non  $\alpha$ , esiste un fascio di parabole che connettono il punto da cui si tira e il canestro: la Figura 9 illustra la relazione tra il modulo della velocità iniziale da imprimere e l'angolo scelto per il tiro.

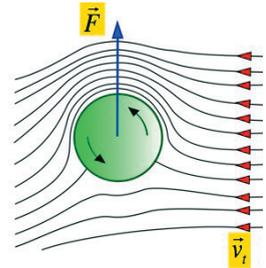


Figura 6. Effetto Magnus con forza  $F$  di Magnus e  $\vec{v}$ , velocità dell'aria.

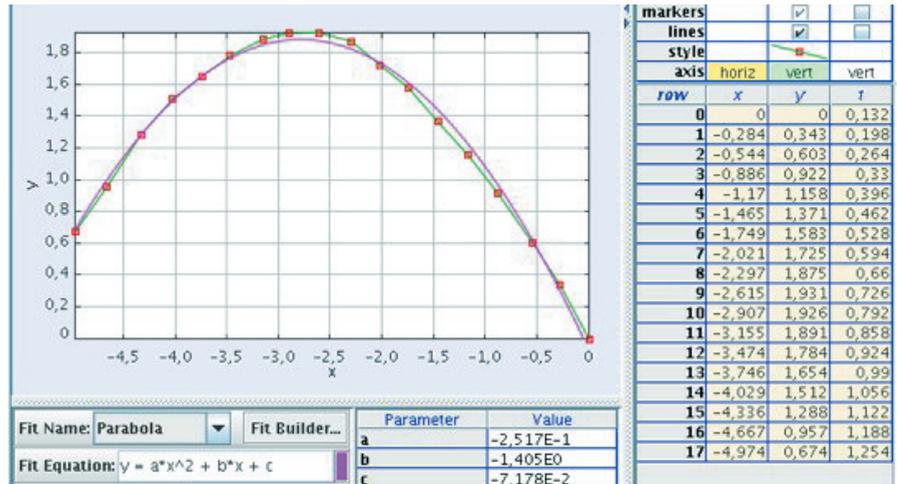


Figura 8. Grafico della traiettoria del tiro a canestro con fit. Nello studio del tiro ci si riconduce al primo quadrante cambiando semplicemente il segno di b.

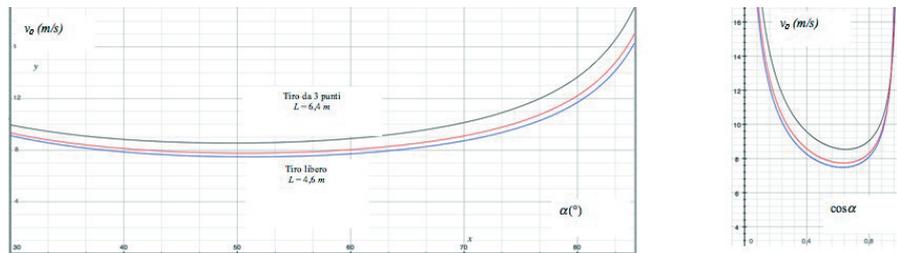


Figura 9. Variazione della velocità iniziale in funzione dell'angolo di inclinazione affinché si realizzi canestro da 3 punti o tiro libero. La curva intermedia fa riferimento alla distanza analizzata nel video (circa 5 m). Il grafico  $v_0 - \cos\alpha$  evidenzia la presenza di una inclinazione di lancio che minimizza la velocità iniziale da imprimere. Si è scelto un giocatore alto 1,8 m che salta 0,35 m lasciando la palla 0,15 m sopra la propria testa:  $h$  vale circa 0,7 m essendo il canestro alto circa 3 m.

Per ottenere l'angolo  $\alpha_{v \min}$ , corrispondente alla velocità minima di tiro, si impone:

$$f'(\alpha) = \frac{gL \operatorname{tg}^2 \alpha - 2 \frac{h}{L} \operatorname{tg} \alpha - 1}{\cos^2 \alpha (\operatorname{tg} \alpha - \frac{h}{L})^2} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{L} + \sqrt{\left(\frac{h}{L}\right)^2 + 1}.$$

Si ottiene quindi il valore:

$$\alpha_{v \min} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{h}{L}. \tag{5}$$

Si nota dunque che i valori delle inclinazioni che implicano velocità minima sono concentrati tra  $45^\circ$  e  $60^\circ$  poiché  $h$  è raramente superiore a un metro (è pari alla differenza tra l'altezza del canestro e la somma di altezza del giocatore, elevazione e spinta data alla palla con le braccia) e la distanza  $L$  da canestro per questo tipo di tiro è solitamente maggiore di 1,5-2 m (per distanze inferiori si ricorre solitamente al tiro in corsa o alla schiacciata).

Questa angolazione è particolarmente conveniente perché, minimizzando  $v_0$ , si rende minima la forza media  $F$  da imprimere alla palla per un breve tratto  $d$  (so-

litamente dipendente dalla tecnica di tiro del giocatore) per compiere il lavoro che le fornisce l'energia cinetica iniziale:

$$Fd = \frac{1}{2}mv_0^2 \Rightarrow F = \frac{m}{2d}v_0^2 \Rightarrow F_{\min} = \frac{m}{2d}v_{0\min}^2.$$

Un'altra condizione sull'inclinazione di tiro e sulla "tolleranza" concessa dalla differenza tra il diametro del canestro (0,45 m) e il diametro della palla (0,246 m) può essere ricavata studiando l'angolo  $\beta$ . Fissato questo angolo, la palla "vede" un tratto utile all'ingresso pari al diametro dell'anello per il seno di  $\beta$  (come si può notare in Figura 10). Questo tratto deve essere maggiore del diametro della palla, dunque  $\beta$  deve essere maggiore di  $33^\circ$ . Anche  $\alpha$  deve essere maggiore di questo valore dato che:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2h}{L} + \operatorname{tg} \beta.$$

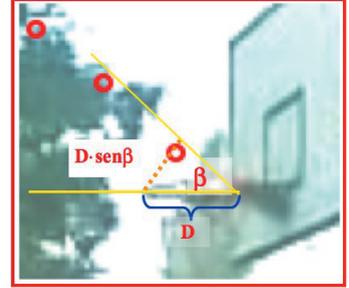


Figura 10. La linea tratteggiata rappresenta il "tratto utile" per l'entrata della palla,  $D$  è il diametro dell'anello.

Se ne deduce che al crescere dell'angolazione iniziale aumenta la probabilità di fare canestro (purché questa mantenga valori che non differiscono da  $\alpha_{v\min}$  di più di  $5\text{-}10^\circ$ , altrimenti la forza da imprimere aumenta in modo significativo).

Concludiamo ora lo studio sul basket analizzando il tiro filmato alla luce dei valori forniti da Tracker e dei legami studiati tra angolo di lancio e velocità iniziale. Dal *fit* in Figura 8 (in accordo con la (3)) si ricava che

$$b = \operatorname{tg} \alpha \approx 1,405 \Rightarrow \alpha^\circ \approx 54,56^\circ; \quad a = -\frac{g}{2(v_0 \cos \alpha)^2} \approx -0,2517 \Rightarrow v_0 \approx 7,61 \frac{m}{s}.$$

Il valore di  $v_0$  è molto vicino a quello (7,59 m/s) che si otterrebbe dividendo il valore della velocità orizzontale calcolato dalla pendenza della retta del grafico  $x-t$  per il coseno di  $\alpha$ .

La tabella in Figura 8 fornisce anche i valori  $h = 0,674$  m,  $L = 4,974$  m.

Verifichiamo ora che questi dati rispettino la (4):

$$\sqrt{\frac{gL}{2 \cos^2 \alpha (\operatorname{tg} \alpha - \frac{h}{L})}} \approx 7,56 \frac{m}{s} \approx v_0.$$

Quindi, considerando la tolleranza consentita dalle dimensioni dell'anello, il canestro si realizza. L'angolo scelto per il tiro è prossimo all'angolo corrispondente alla velocità minima:

$$\alpha_{v\min} = 45^\circ + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{0,674}{4,974} \approx 48,9^\circ.$$

Si nota allora che l'esperto tiratore ha scelto un angolo opportuno in virtù di un allenamento costante ed efficace.

## 7. Conclusioni

Grazie a Tracker si possono dunque comprendere e visualizzare le leggi fisiche che governano la traiettoria della palla nei diversi sport.

Il giocatore può sfruttare questa consapevolezza e cercare di applicarla nella pratica del gioco, comprendendo l'effetto dato alla palla dall'avversario, ricevendo al meglio e studiando nuove strategie di attacco e di tiro.

Con questo software lo studente sarà più motivato a studiare il moto parabolico e la dinamica dei fluidi, potendo elaborare anche “strategie fisiche vincenti”, da applicare quando pratica il suo sport preferito.

*Questo lavoro non sarebbe stato possibile senza l'aiuto e la collaborazione del prof. Luigi Togliani che mi ha permesso di conoscere e apprezzare il software Tracker. Un ringraziamento particolare alla prof.ssa Erica Soranzo che ha collaborato nell'applicazione alle attività sportive con la palla.*

## Bibliografia

- [1] N. DE MESTRE, *The mathematics of projectiles in sport*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.  
 [2] A. ARMENTI, *The physics of sports*, Volume 1, Springer, 1992.

## Note

<sup>1</sup> Software libero realizzato da Douglas Brown e scaricabile dal sito <http://www.cabrillo.edu/~dbrown/tracker/>. Analisi video (convertiti) in formato *mov*, è compatibile con Mac, Windows, Linux. Richiede l'installazione di Java 1.5 e QuickTime 7.

<sup>2</sup> Per ricondurre l'analisi del colpo alla sola traccia della posizione della pallina rispetto al sistema di assi cartesiani fissato, è necessario che la ripresa sia pressoché parallela al piano in cui si muove la pallina supposta puntiforme. In Figura 3 si nota che questo limite è approssimativamente rispettato, infatti l'asse  $x$  è parallelo al lato lungo del tavolo e il lato corto del tavolo (che dovrebbe essere pressoché puntiforme), ha dimensioni ridotte

<sup>3</sup> Effetto causato dalla rotazione della palla che provoca, per un tratto, una forza ascendente o discendente a seconda del verso di traslazione e di rotazione. Rispetto alla palla, l'aria fluisce nel verso opposto al suo moto, dunque, ad esempio in Figura 6, la palla trasla da sinistra a destra ruotando in senso antiorario. Alla sommità della pallina, la velocità tangenziale del suo moto circolare è concorde con la velocità dell'aria, mentre all'estremità inferiore le due velocità sono discordi. Pertanto per l'effetto Venturi la pressione agente sulla parte inferiore della pallina è superiore a quella agente alla sommità e dunque questa tende a salire.

<sup>4</sup> [http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Magnus\\_effect&oldid=350635236](http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Magnus_effect&oldid=350635236);  
<http://wright.nasa.gov/airplane/lifteq.html> (la formula  $C_L = 2\pi\alpha_0$  sembra adattarsi anche al caso studiato, fornendo circa 0,5 per un angolo di inclinazione della velocità rispetto a  $x$  pari a 0,07 rad). Si noti anche la maggiore concentrazione di valori di  $C_L$  tra 0,3 e 0,7 nel grafico a pag. 23 dell'articolo seguente: [http://www.usaypt.org/how%20to%20participate/Ball\\_Spin/ball\\_spin\\_IYPT2005.swf](http://www.usaypt.org/how%20to%20participate/Ball_Spin/ball_spin_IYPT2005.swf)

<sup>5</sup> Si sfrutta l'identità  $w + \sqrt{w^2 + 1} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} w\right)$  dimostrabile ponendo  $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} w = z$ ;  $0 \leq z \leq \frac{\pi}{4}$  perché nel tiro a canestro l'angolo di lancio deve essere acuto. Si verifica che:

$$\operatorname{tg}(2z) + \sqrt{\operatorname{tg}^2(2z) + 1} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + z\right).$$

<sup>6</sup> Dimostrazione: la tangente alla parabola (3) nel punto di ingresso nel canestro  $C(L, h)$  è

$$m = \operatorname{tg}(\pi - \beta) = -\operatorname{tg}(\beta) = f'(L) = -\frac{g}{v_{0x}^2} L + \operatorname{tg}\alpha \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = -\frac{g}{v_{0x}^2} L.$$

Da qui e per  $C$  appartenente alla parabola (3) si ottiene:

$$h = -\frac{g}{2v_{0x}^2} L^2 + \operatorname{tg}\alpha \cdot L \Rightarrow 2\operatorname{tg}\alpha = \frac{2h}{L} + \frac{g \cdot L}{v_{0x}^2} = \frac{2h}{L} + \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{2h}{L}.$$

**L CONGRESSO NAZIONALE AIF**  
**Piacenza 19-22 ottobre 2011**