



Ledo Stefanini,
Agnese Berra

Corso di Laurea in
Ingegneria
dell'Università di
Mantova

Immagini fotografiche di una ruota di bicicletta

(Pervenuto il 13.5.2008, approvato l'11.5.2009)

ABSTRACT

The analysis of the kinematics of a wheel that rolls on a level ground requires highschool maths. It suggests an easy and interesting lab activity suited to highschool students.

1. Introduzione

Il manuale di fisica di Halliday e Resnick [1], come illustrazione del moto di rotolamento, riporta la fotografia di una ruota da bicicletta (fig. 1). Nella didascalia si fa notare che le immagini dei raggi sono tanto più definite, quanto più prossimi al punto di contatto con il pavimento, perché in questa posizione la loro velocità è nulla.

Nell'immagine dei raggi, tuttavia, è possibile riconoscere una struttura abbastanza precisa che, d'altra parte, si può osservare anche direttamente in una bicicletta che passa. Appare come una curva molto simile ad una circonferenza che sembra avere il diametro uguale al raggio della ruota, e il centro nel punto medio del segmento verticale che congiunge il mozzo con il terreno. Si tratta quindi di un'immagine fissa, che non segue cioè il moto della ruota. Riflessioni sulle strane immagini che si possono osservare in una ruota di bicicletta in moto e sulle ombre che proietta, sono state proposte in un godibilissimo libretto di Minnaert [2] che, tuttavia, prende in considerazione le apparenze visive, non mediate dalla macchina fotografica.

Noi ci siamo proposti di dare un'interpretazione cinematica della struttura circolare che abbiamo riconosciuto nell'immagine di fig. 1 e in altre che abbiamo ripreso con l'ausilio di tradizionali camere fotografiche a pellicola e con più moderne fotocamere digitali. Di queste ne proponremo tre: una ruota in moto, ma con asse fisso; una ruota che passa rotolando, in luce naturale, e la stessa, ma presa in luce artificiale.

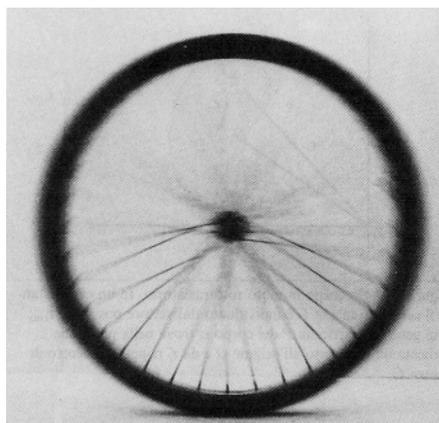


Figura 1. Fotografia di una ruota di bicicletta che rotola [Da Halliday, Resnick, Krane, op. cit.].

2. Una ruota in moto con asse fisso

Per ottenere una fotografia di una ruota in rotazione intorno all'asse fermo, basta appoggiare a terra una bicicletta rovesciata, mettere in rotazione la ruota anteriore e scattare. È opportuno fare la cosa all'aperto, in modo che la luce sia quella solare. Infatti, la combinazione delle moderne camere digitali e di una lampada a bagliore – che emette lampi con una frequenza di 100 Hz – può produrre effetti non facilmente interpretabili. Il risultato che si ottiene è simile a quello della fig. 2.



Figura 2. Fotografia di una ruota in rotazione intorno all'asse fisso. Illuminazione in luce solare.



Figura 3. Simulazione dell'immagine fotografica di un'asta che si sposta con velocità costante.

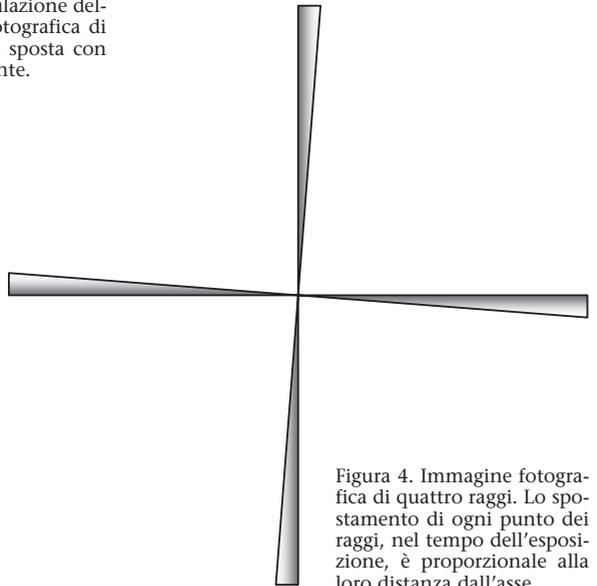


Figura 4. Immagine fotografica di quattro raggi. Lo spostamento di ogni punto dei raggi, nel tempo dell'esposizione, è proporzionale alla loro distanza dall'asse.

La fotografia risulta “mossa”. In particolare, le immagini dei raggi della ruota vengono sfuocate tanto più quanto maggiore è la loro distanza dall’asse. Per comprenderne il motivo, occorre tener presente che, quando si fotografa un oggetto in moto, l’immagine che si ottiene ha uno spessore che è proporzionale al tempo dell’esposizione e alla velocità dell’oggetto. Immaginiamo, ad esempio, di fotografare un solo raggio che trasla in direzione perpendicolare: otterremo un rettangolo la cui larghezza è proporzionale alla sua velocità (fig. 3).

Tuttavia, l’immagine è tanto meno marcata quanto più grande è l’area su cui è distribuita. Pertanto, l’immagine del raggio sarà tanto più nitida quanto minore è la sua velocità.

Nel caso di una ruota in rotazione intorno ad un asse fisso, per una data velocità angolare, la velocità dei punti dei raggi aumenta con l’aumentare della distanza dal centro di rotazione. Il risultato è quindi un’immagine del tipo suggerito in fig. 4.

L’immagine di un raggio si allarga quindi dal centro verso la periferia della ruota, con la conseguenza che la sua nitidezza diminuisce dal centro verso l’esterno, tanto che, da un certo punto in poi, l’immagine è talmente distribuita da non lasciare traccia visibile. Questo spiega perché i raggi sono visibili solo dal centro fino ad una certa distanza.

3. Una ruota in moto di rotolamento

Raddrizziamo ora la bicicletta e scattiamo alcune fotografie della ruota nel momento in cui passa davanti alla macchina fotografica. Il risultato è molto diverso ed esposto in fig. 5.

Si tratta della situazione utilizzata come illustrazione nel testo di Halliday e Resnick ricordato all’inizio. Ora, nel sistema di riferimento della fotocamera, l’asse istantaneo di rotazione della ruota non è il mozzo, ma il suo punto di contatto con il pavimento. Le velocità dei punti dei raggi che si trovano sopra il mozzo sono molto maggiori delle velocità di quelli che si trovano al di sotto e quindi si ottengono le immagini solo di queste ultime (fig. 6).

Tuttavia questo non basta a spiegare il risultato che si osserva: nella parte inferiore della ruota le immagini dei raggi determinano una figura che potrebbe essere un cerchio più piccolo della ruota.

Per spiegare l’immagine è necessario rifarsi a ciò che abbiamo detto prima e cioè che la nitidezza dell’immagine di ogni punto è determinata dalla velocità in direzione normale al raggio stesso (fig. 7).

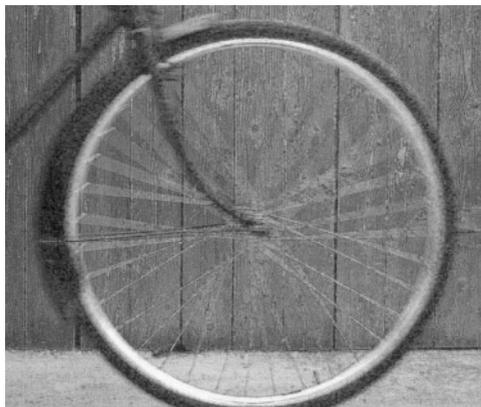


Figura 5. Fotografia di una ruota in rotazione. Illuminazione con luce solare.

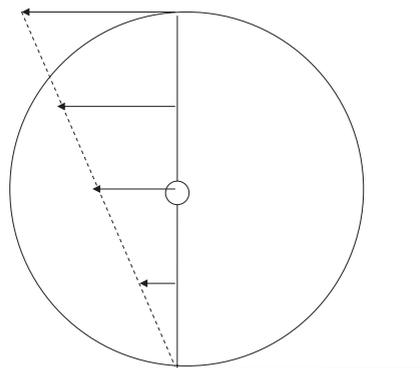


Figura 6. Velocità dei punti di due raggi appartenenti al diametro verticale.

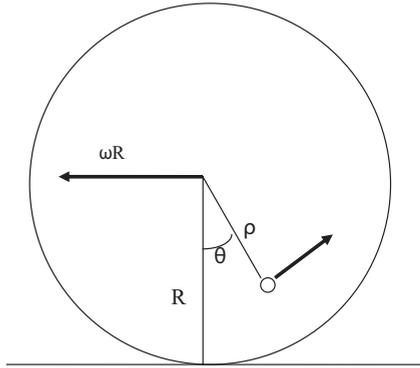


Figura 7. Significato dei simboli utilizzati.

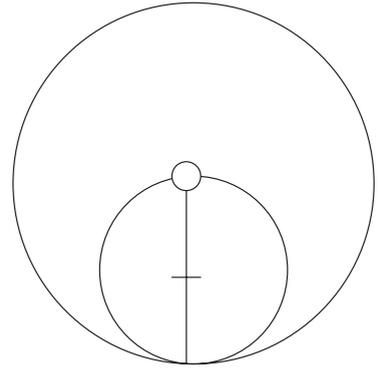


Figura 8. I punti della circonferenza piccola sono quelli per i quali è nulla la componente della velocità normale al raggio.

Alla velocità di un punto della ruota a distanza ρ dal mozzo contribuiscono due velocità: la velocità $\omega\rho$ dovuta alla rotazione e la velocità ωR del mozzo dovuta al rotolamento. La prima è perpendicolare al raggio, la seconda forma col raggio un angolo che è supplementare dell'angolo θ che il raggio forma con l'orizzontale. La somma delle due velocità, nella direzione perpendicolare al raggio, fornisce una velocità

$$V_{\perp} = \omega R \left(\frac{\rho}{R} - \cos\theta \right). \quad (1)$$

È questa che determina la dispersione dell'immagine degli elementi del raggio.

Cominciamo con l'osservare che vi sono punti sui raggi per i quali la componente normale della velocità è zero. Sono quello per i quali

$$\rho = R \cos\theta. \quad (2)$$

Si tratta dell'equazione (in coordinate polari) di una circonferenza che ha il centro a metà del raggio verticale rivolto in basso (fig. 8).

I punti dei raggi che si trovano su questa circonferenza si muovono, istantaneamente, solo lungo il raggio a cui appartengono essendo nulla la loro velocità in direzione perpendicolare al raggio. Sono quindi quelli più stabili ai fini della fotografia. I punti che stanno all'interno di questa circonferenza hanno la componente di velocità perpendicolare al raggio che è negativa. Vale a dire che questi punti, nel tempo dell'esposizione, si spostano in senso opposto a quello della rotazione. Per esempio, per $\theta = 0$, la (1) diventa

$$V_{\perp} = \omega R \left(\frac{\rho}{R} - 1 \right) \quad (3)$$

per cui la velocità sul raggio verticale ha l'andamento lineare indicato in fig. 6.

Se facciamo una fotografia con un tempo di esposizione non trascurabile rispetto al periodo di rotazione, l'immagine dei raggi verticali sottostanti il mezzo avrà la forma di un triangolo rettangolo con il vertice nel punto di contatto con il terreno. Ma per un raggio di anomalia θ le cose stanno diversamente.

Il suo punto a distanza $\rho = R \cos\theta$ dal centro ha componente di velocità nulla, e quindi la sua immagine sarà la più netta e definita. I punti del raggio che vanno da questo punto al centro hanno velocità normale negativa; quelli che si trovano a distanza maggiore, velocità normale positiva (fig. 9).

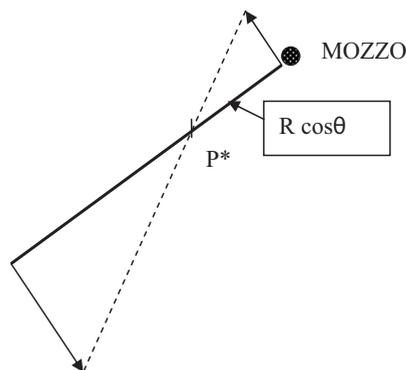
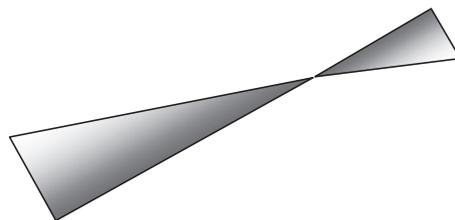


Figura 9. Distribuzione delle velocità per un raggio qualsiasi della metà inferiore della ruota.



10. Immagine fotografica di un raggio della parte inferiore della ruota.

Questo significa che il punto P^* del raggio che si trova a distanza $R \cos \theta$ sarà quello che viene meglio nella fotografia, gli altri punti del raggio verranno mossi, ma in modo diverso. Quelli che hanno dal centro distanza maggiore di P^* vengono spostati nel verso del moto; gli altri in verso contrario. Pertanto, l'immagine del raggio sarà del tipo indicata in fig. 10 [3].

L'unico raggio istantaneamente e totalmente fermo rispetto alla macchina fotografica è quello che punta verso il terreno; gli altri (della parte inferiore della ruota) hanno solo un punto istantaneamente fermo. Tuttavia, una ripresa fotografica richiede un intervallo di tempo non nullo (tempo di esposizione) e in questo tempo il punto corre lungo il raggio, dalla periferia verso il centro [4] con una velocità

$$V_r = \omega R \sin \omega t \quad (4).$$

4. Una ruota ripresa in luce artificiale

Abbiamo proposto ai nostri studenti del corso introduttivo di fisica di ottenere una fotografia come quella di fig. 5. La prova è stata realizzata in un interno dove la sorgente di luce era una lampada a bagliore che forniva un illuminamento piuttosto debole per la sensibilità della nostra macchina fotografica, per cui il tempo di esposizione era confrontabile con il periodo di rotazione della ruota. Il risultato ottenuto è riportato in fig. 11.

Si tratta, in sostanza, di una ripresa continua, nella quale l'immagine è una



Figura 11. Fotografia di una ruota che rotola. La sorgente è una lampada a bagliore.

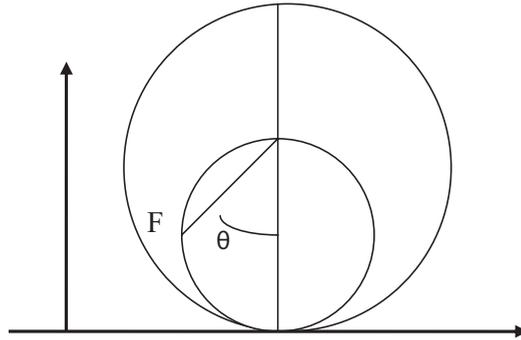


Figura 12. Sistema cartesiano a cui sono riferite le coordinate del punto *Fermo*.

sovrapposizione di immagini, ognuna delle quali si forma quando il soggetto è illuminato dal lampo di luce. In questo caso la lampada emette un lampo ogni 10 ms, essendo di 50 Hz la frequenza di rete.

Per comprendere la deformazione delle immagini dei raggi è necessario ricordare che l'unico punto del raggio che ha nulla la componente ortogonale della velocità è quello che si trova a distanza $\rho = R \cos \theta$ dal centro della ruota. Lo chiameremo *Fermo* – per usare un nome manzoniano – anche se, come abbiamo visto, la sua velocità lungo il raggio non è nulla.

In un riferimento cartesiano con l'asse orizzontale e ancorato a terra (Fig. 12), le coordinate del punto F sono:

$$\begin{aligned} x &= R(\theta - \sin \theta \cos \theta) \\ y &= R(1 - \cos^2 \theta). \end{aligned} \quad (5)$$

Queste sono le equazioni parametriche di una curva che conviene scrivere nella forma

$$\begin{aligned} x &= \frac{R}{2}(2\theta - \sin 2\theta) \\ y &= \frac{R}{2}(1 - \cos 2\theta) \end{aligned} \quad (6)$$

che consente di riconoscerla come una cicloide (fig. 13).

I risultati ottenuti ci consentono quindi di riconoscere nelle curve che compaiono nelle fotografie in luce artificiale le cicloidi descritte dai punti dei raggi che hanno nulla la componente di velocità ortogonale al raggio stesso.

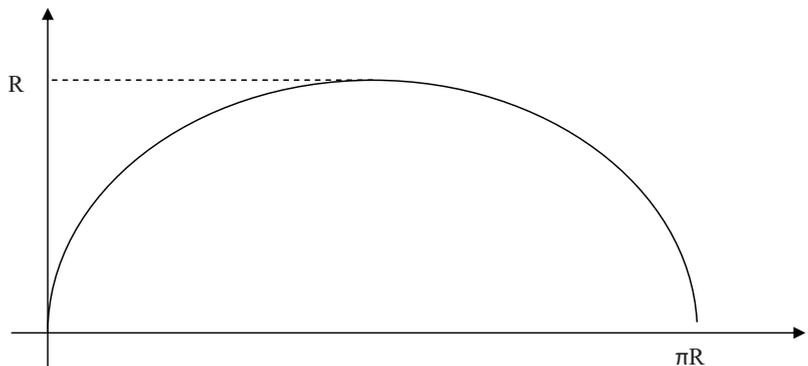


Figura 13. Grafico della cicloide luogo dei punti *Fermo*.

Bibliografia

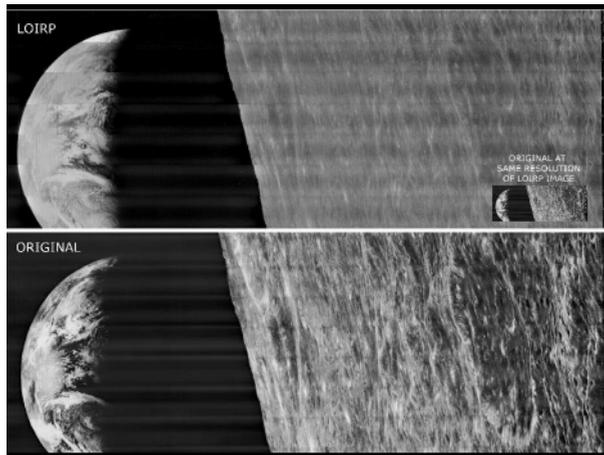
- [1] D. HALLIDAY, R. RESNICK, K.S. KRANE, *Fisica*, Casa Editrice Ambrosiana, Milano, 1994, Vol. 1, Cap. 12.
 [2] M. MINNAERT, *The Nature of Light & Colour in the open Air*, Dover Publication Inc., New York, 1954, Cap. 8.
 [3] R.E. DE SOUZA, G.L. VASCONCELOS, "Visual appearance of a rolling bicycle wheel", *Am. J. Phys.* **64**, 896 (1996).
 [4] N.L. SHARMA, "A new observation about rolling motion", *Eur. J. Phys.* **17**, 353-356 (1996).

LA COPERTINA

http://www.nasa.gov/mission_pages/apollo/40th/images/apollo_image_7.html

La missione Apollo 8 (Frank Borman, James Lovell, William Anders) fu il primo viaggio umano dalla Terra intorno alla Luna e ritorno. Il modulo di comando fece dieci giri attorno al nostro satellite: emergendo dalla faccia nascosta, nel riferimento in volo libero del modulo orbitante, all'equipaggio si presentò questa immagine della Terra, come se sorgesse sopra l'orizzonte lunare, il 22 dicembre 1968. Per la prima volta nella storia un occhio di *Homo sapiens sapiens* con annessi e connessi osservò la Terra dallo spazio profondo alla distanza della Luna.

Ma la prima fotografia, cioè il *primo sguardo di protesi di occhio umano*, dalla Luna verso la Terra è quella mostrata qui sotto, presa nel 1966 dalla sonda automatica Lunar Orbiter 1. Nell'ambito del progetto della NASA "Lunar Orbiter Image Recovery Project" (LOIRP), in anni recenti è stato completato il lavoro di recupero di immagini digitali a partire dai dati originali su nastro magnetico delle cinque missioni del Lunar Orbiter, avvenute tra il 1966 e il 1967.



<http://www.nasa.gov/topics/moonmars/features/LOIRP/mt13a410msf192199.comp.s.html>

Secondo Victor Frederick Weisskopf (1908-2002) "L'uomo è l'occhio attraverso cui l'Universo ha imparato a osservare se stesso"; quello di Galileo, per mezzo del nuovo "occhiale", costituisce il primo sguardo profondo lanciato dall'occhio con cui l'Universo, dopo miliardi di anni di incubazione evolutiva, ha imparato a osservare se stesso.¹

¹ V. Weisskopf, *Le gioie della scoperta*, Garzanti, Milano (1992), citato in: P. Greco, *L'astro narrante*, Springer-Verlag, Milano (2009).

Non più la luna è cielo a noi, che noi a la luna.
 Giordano Bruno, *La cena delle ceneri* (1584)