Ledo Stefanini
Università di Mantova

Leggi, dimensioni e segno di uguaglianza

(Pervenuto il 5.10.2007, approvato il 22.10.2008)

ABSTRACT
The article discusses, with many examples, the difference between the universal meaning of physical laws (e.g. proportionalities between physical quantities) and their customary computable representations. These require introducing auxiliary quantities and coefficients whose physical definitions and numerical values depend on the unit system chosen.

"La matematica non si capisce; ci si fa solo l'abitudine". È un peccato che questa frase sia di un matematico, perché è tanto più vera per la fisica. Infatti, gran parte del lavoro dell'insegnante di fisica consiste nell'abituare i ragazzi all'*uso* di strumenti concettuali, senza fare gran caso alla loro struttura interna: funzionano e tanto basta.

A questo proposito è necessario osservare che l'esagerato aumento delle dimensioni dei manuali scolastici che si è verificato negli ultimi anni è stato in direzione orizzontale, cioè è consistito in un aumento del numero di questioni che si mostrano trattabili con gli strumenti concettuali assunti come propri della fisica scolastica, piuttosto che in un aumento della profondità concettuale, cioè dell'analisi del significato di quegli strumenti.

Un esempio di questa superficialità di approccio ai fenomeni è rappresentato dal significato di grandezze come la *pressione* (che ha le dimensioni di una forza divisa per una superficie) o l'intensità del *campo magnetico* (che ha le dimensioni di una forza divisa per una carica e una velocità) e via dicendo. Spesso, scolasticamente, tutto si risolve dando un nome a queste grandezze: si definiscono il *pascal* e il *tesla* e il disagio scompare. Ma solo a livello psicologico; gli interrogativi sulla natura di queste grandezze, quelli rimangono.

1. Unità di misura e algebra

I manuali scolastici forniscono definizioni impeccabili delle unità di misura, almeno di quelle fondamentali: il *metro*, il *chilogrammo*, il *secondo*, l'*ampere*. Spesso la definizione coinvolge argomenti di fisica molto avanzata, come la spettroscopia o la relatività generale; ma è raro che vengano indicate le relazioni molto strette tra la scelta e la definizione delle unità e la fisica nell'accezione scolastica.

Una prima questione è se venga prima la fisica o le unità di misura. La risposta è semplice anche perché storicamente evidente: la fisica viene prima delle unità di misura. In Galileo si trova citata qualche unità di lunghezza (il braccio, il piede); ma l'unità di tempo è il battito del polso. Lo stesso si può dire per Newton. Significa che i fondamenti della meccanica classica sussistono indipendentemente dalla definizione delle unità di misura; il che equivale a dire: senza l'utilizzo del calcolo algebrico. D'altra parte, la scelta di assumere come unità fondamentali quelle di *lunghezza*, *tempo* e *massa* equivale ad assumere la newtoniana come teoria principe dei fenomeni meccanici, senza interrogarsi troppo se la definizione dei campioni corrisponde esattamente al significato che le grandezze hanno nell'ambito della teoria. Per esempio, senza chiedersi se il campione di massa, riprodotto con la bilancia, corrisponda propriamente alla massa inerziale quale viene definita nei manuali. Certo è che la definizione dei campioni è il costo che bisogna pagare per passare dal linguaggio di Keplero, Galileo e Newton – il linguaggio delle *proporzioni* – al linguaggio algebrico; quello che fa uso del segno di uguaglianza. Si è trattato di una trasformazione che ha comportato innumerevoli benefici, con qualche svantaggio, a livello di comprensione.

Un'altra delle cose che non sempre i manuali mettono convenientemente in luce è il fatto che i campioni sono utili in quanto riproducibili e trasportabili. Si tratta di un'operazione che presenta importanti problemi concettuali, come sappiamo ormai da tempo e che può condurre a fondare una fisica diversa. Il fatto è che

$$g = 9{,}8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \tag{1}$$

è realmente un'informazione solo se chi la riceve dispone dei campioni di metro e di secondo. Troveremmo grosse difficoltà a trasmettere il valore del campo gravitazionale in cui viviamo se il nostro corrispondente fosse un abitante di una galassia lontana. Il contenuto informativo del valore di g sarebbe irrimediabilmente nullo; mentre conserverebbe la sua validità l'informazione che, nella caduta libera, lo spazio percorso è proporzionale al quadrato dei tempi: espressa nel linguaggio di Galileo. Altrettanto varrebbe se comunicassimo che, nel nostro sistema solare, i periodi dei pianeti stanno – per dirla *à la Keplero* – in proporzione *sesquilatera* con le distanze. Quindi, i campioni condivisi presuppongono l'esistenza di una teoria condivisa, anche se ne possono favorire lo sviluppo e le applicazioni. È banale osservare che non è necessario che i vari osservatori utilizzino propriamente le stesse unità: necessario, tuttavia, che condividano il codice che consenta di passare da un sistema all'altro. Anzi, lo stesso simbolismo adottato nella (1) dice come effettuare il passaggio. Per esempio, se un fisico sa che 1 m = 39,37 pollici e 1 s = 10^3 ms, tutto ciò che deve fare è

$$g = 9{,}8\,\frac{m}{s^2} = \frac{9{,}8 \times 39{,}37}{\left(10^3\right)^2}\,\frac{\text{pollici}}{\text{ms}^2}\,. \tag{2}$$

In questo consiste il significato della scrittura: dice quali calcoli fare per passare da un sistema di unità ad un altro, ammesso che si possieda il codice.

In altre parole, alla proposizione (1) concorrono due componenti. La prima, che descrive un fatto fisico, è la galileiana

$$s \propto t^2\,; \tag{3}$$

la seconda risulta da convenzioni che riguardano la scelta e la definizione delle unità di misura. Nell'insegnamento succede che quest'ultima componente faccia schermo alla prima e, comunque, il rischio è che sia la sola ad installarsi nella mente dei ragazzi.

È anche necessario segnalare che le unità di misura *standard* non svolgono lo stesso ruolo in tutte le leggi fisiche. Prendiamo per esempio la scarica del condensatore:

$$V = V_0 \exp\left(\frac{t}{RC}\right) \tag{4}$$

che sarebbe meglio scrivere nella forma

$$\frac{V}{V_0} = \exp\left(\frac{t}{RC}\right). \tag{5}$$

Questa pone l'enfasi sul fatto che per la tensione V e il tempo t vi sono due grandezze di confronto naturali, diverse dalle unità *standard*, e cioè il valore iniziale della tensione V_0 e la costante RC. Se si vedono le cose in questo modo, la (5) asserisce l'uguaglianza di numeri puri. Questo vale per tutte le relazioni tra grandezze espresse da funzioni trascendenti.

2. Teorie e sistemi di unità

Facciamo riferimento ad una teoria dello spazio con la quale abbiamo molta familiarità: la geometria euclidea. Nella formulazione scolastica, per le aree delle figure e i volumi dei solidi questa teoria produce una varietà di bellissime *formule* come le classiche

$$A = L^2, \quad V = \frac{4}{3}\pi R^3 \tag{6}$$

che sono utilissime. A tal punto che molti ragazzi (e qualche insegnante) le scambiano per *definizioni* dell'area del quadrato e del volume della sfera, dimenticando che, invece, queste rappresentano delle *leggi* che mettono in relazione misure di una lunghezza con misure di superficie e di volume, cioè con grandezze diverse. L'esistenza di leggi come quelle appena citate consente di *utilizzare* la geometria servendosi solamente di un regolo per la misura delle distanze. Tuttavia, questa possibilità poggia su una teoria (la geometria euclidea) che sussiste in maniera indipendente da questa opportunità. Infatti, la geometria definisce le grandezze *superficie* e *volume* in maniera indipendente dalla grandezza distanza. Poniamo di costruire una geometria nella quale le unità di misura delle aree e dei volumi siano indipendenti dalle unità di lunghezza; poniamo, ad esempio, di misurare le distanze in *metri*, le superfici in *are*, e i volumi in *galloni*. In tale sistema le formule che abbiamo ricordato non sussisterebbero più, anche se il significato geometrico rimarrebbe: le aree di due quadrati starebbero ancora come i quadrati dei lati e il rapporto dei volumi di due sfere sarebbe ancora uguale al cubo del rapporto dei raggi. In simboli

$$A \propto L^2 ; V \propto R^3 \quad . \tag{7}$$

In queste leggi, indipendenti dal sistema delle unità di misura, è racchiuso il contenuto fisico della teoria. Il passaggio dal segno di proporzionalità ($\propto$) al segno di uguaglianza (=) richiede, oltre alla teoria fisica, la definizione di un sistema di unità *conveniente*: nel nostro caso che l'unità di superficie sia un quadrato che abbia come lato l'unità di lunghezza e l'unità di volume un cubo che abbia come spigolo la stessa unità. Queste sono le condizioni perché valgano le relazioni (6).

La validità delle formule è quindi fondata su due basi concettuali:
1. una teoria fisica;
2. un numero di unità fondamentali inferiore a quello delle grandezze utilizzate nell'ambito della teoria.

La transizione dal segno di proporzionalità al segno di uguaglianza comporta, innegabilmente, numerosi vantaggi (tra cui quello di poter costruire una sequenza illimitata di problemi con cui arricchire i vari capitoli) ma anche dei costi, tra i quali vi è quello di un allontanamento dal significato fisico delle proposizioni.

Per esempio, le costanti di proporzionalità che compaiono nelle (6) sono il prezzo che si deve pagare se si vogliono determinare aree e volumi compiendo solo misure di lunghezza. Il valore di queste costanti dipende, ovviamente, dal sistema delle unità adottate. Se scegliessimo di misurare le distanze in *metri*, le superfici in *are* e i volumi in *galloni*, i valori delle costanti sarebbero diversi.

Si osservi che un fattore di proporzionalità dimensionale compare anche in relazioni come

$$A = L^2 \quad \text{e} \quad V = L^3 \tag{8}$$

relative all'area del quadrato e al volume del cubo. In queste il fattore è unitario (a condizione che le unità di misura siano scelte opportunamente) ma non è privo di dimensioni. Queste sono

$$\frac{\text{superficie}}{\mathrm{L}^2} \quad \text{e} \quad \frac{\text{volume}}{\mathrm{L}^3},$$

rispettivamente.

Prendiamo la (cosiddetta) terza legge di Keplero:

$$T^2 \propto R^3 . \tag{9}$$

La potremmo esprimere come uguaglianza:

$$R^3 = T^2 \tag{10}$$

che somiglia tanto alla precedente, ma in modo ingannevole. Dovremmo infatti aggiungere l'avvertimento che la costante di proporzionalità (unitaria) ha le dimensioni

$$\frac{(\text{unità astronomiche})^3}{\text{anni}^2}.$$

Adottando, invece, le unità standard, assume la forma

$$R^3 = 3{,}4 \times 10^{18}\, T^2 \tag{11}$$

dove la costante è espressa in m^3/s^2. Il contenuto informativo della (11) è superiore a quello della (9) solo per osservatori che condividano le unità di misura degli spazi e dei tempi.

Se la immergiamo nella meccanica classica, la (9) assume la forma

$$R^3 = \frac{GM}{4\pi^2} T^2 . \tag{12}$$

La differenza tra le due formulazioni è rappresentata dalla comparsa di una terza grandezza (la massa *M*) che nella (9) è assente. La costante $G/4\pi^2$ deriva dalla scelta delle unità di misura; la grandezza M dal riferimento teorico. Potremmo anche adottare la (12) come *definizione* di massa (del corpo centrale) e scriverla più semplicemente nella forma

$$R^3 = M\, T^2 \tag{13}$$

dove la grandezza *M* avrebbe le dimensioni fisiche $\left[M\right] = \left[\frac{\mathrm{L}^3}{\mathrm{t}^2}\right]$. Equivarrebbe ad utilizzare la (10) adottando come unità di massa quella del sole.

Pertanto, la possibilità di utilizzare un numero di unità fondamentali inferiore al numero delle grandezze (per esempio spazio, tempo e massa per descrivere i fenomeni meccanici) è basata sull'esistenza di una teoria (per esempio, la meccanica newtoniana). L'algebra dimensionale è conseguenza di questo fatto e della scelta di esprimere le leggi facendo uso di un linguaggio matematico che utilizza il segno di uguaglianza.

3. Leggi fisiche e segno di uguaglianza

Una legge fisica è una relazione matematica tra due grandezze definite in maniera indipendente. Non sono pertanto leggi fisiche molte uguaglianze come

$$v = \frac{s}{t};\ p = \frac{F}{S};\ C = \frac{q}{V};\ \lambda = vT;\ \text{ecc.}$$

Tutte queste sono semplicemente *definizioni* spesso determinate dalla necessità di fare uso del segno di uguaglianza nell'espressione delle leggi fisiche. Torniamo ad una teoria fisica semplice come la geometria di Euclide che, nella versione scolastica, porta alla formula semplice e comoda

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 .$$

Abbiamo già osservato che il valore numerico della costante di proporzionalità è corretto solo a condizione che l'unità di volume sia un *cubo* che abbia come spigolo l'unità di lunghezza e che questa costante è dotata di dimensioni fisiche: un volume diviso per la terza potenza di una lunghezza. Il fatto che questo rapporto diventi un numero puro è basato sulla scelta del cubo come unità di volume.

Ma prendiamo una legge empirica popolare come la legge di Ohm. Poniamo di ricavarla esclusivamente da misure di intensità di corrente e di tensione compiute, come Ohm, con un voltametro a nitrato d'argento e un calorimetro. Poniamo dunque che i risultati ottenuti suggeriscano una – per molti aspetti sorprendente – relazione lineare tra le due grandezze:

$$V \propto i\,. \tag{14}$$

Se, al posto della relazione di proporzionalità, vogliamo mettere una relazione di uguaglianza, siamo costretti ad inserire una costante:

$$V = R\,i\,. \tag{15}$$

Diremo quindi che introduciamo una nuova grandezza che chiamiamo *resistenza*, definita da

$$R = \frac{V}{i} \tag{16}$$

che, pertanto, ha le dimensioni del $\dfrac{\text{volt}}{\text{ampere}}$.

Il contenuto fisico della legge è espresso dalla proporzionalità (14), la definizione (16) è determinata dal fatto che un'espressione come la (15) può essere, per molti aspetti – ma non sempre – più conveniente.

Analogamente, poniamo di studiare la forza di attrazione, per unità di lunghezza, tra due fili paralleli percorsi da due correnti di eguale intensità. Troveremmo che

$$\frac{F}{L} \propto \frac{i^2}{d} \tag{17}$$

dove d è la distanza tra i fili. Il problema di esprimere la legge facendo uso del segno di uguaglianza si intreccia con quello dell' unità di misura della corrente. La formulazione canonica è

$$\frac{F}{L} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i^2}{d} \tag{18}$$

dove

$$\frac{\mu_0}{2\pi} = 2 \times 10^{-7}\,\frac{\text{N}}{\text{A}^2} \tag{19}$$

ma, in realtà, il significato è il seguente: scelgo l'unità di corrente in maniera tale che la costante di proporzionalità valga $2{\times}10^{-7}$.

Un altro caso di interesse didattico è rappresentato dalla cosiddetta *equazione del gas ideale*.

Il contenuto fisico è rappresentato dalla legge di Boyle-Mariotte che afferma essere il volume del gas inversamente proporzionale alla pressione (a temperatura costante):

$$V \propto \frac{1}{p}\,. \tag{20}$$

Se vogliamo esprimere la stessa relazione come un'uguaglianza, dobbiamo introdurre una costante il valore della quale dipende da una terza grandezza che non abbiamo ancora definito, ma che chiamiamo *temperatura*. Nulla di più naturale, allora, che porre

$$pV = \tau \tag{21}$$

dove il parametro τ ha le dimensioni di una pressione per un volume, ovvero di un'energia. Ma, per motivi storici, l'unità di temperatura è definita in maniera indipendente da questa; ed è per agganciare questa definizione a tale unità che si pone

$$pV = RT\ . \tag{22}$$

Questa, divenuta definizione operativa della grandezza *temperatura*, comporta il costo dell'introduzione della costante R, indicata come *costante dei gas*, che assume le dimensioni di un'energia divisa per una temperatura. In realtà R è solo il fattore di equivalenza tra l'unità di energia e l'unità di temperatura, definita in maniera indipendente, per una mole di gas ideale.

Osserviamo poi che l'espressione della temperatura in gradi centigradi (o Fahrenheit) è priva di significato fisico. Per asserire che vi è una relazione tra la lunghezza della colonna di mercurio e la temperatura è necessario aver definito la temperatura in maniera indipendente dalla lunghezza. Pertanto, la misura della temperatura con il termometro a mercurio, basata sull'ipotesi di una proporzionalità tra la lunghezza e una grandezza non (ancora) definita, è semplicemente una tautologia. Risulta infatti priva di senso fisico un'affermazione del tipo: «l'acqua bolle ad una temperatura che è quintupla rispetto alla temperatura ambiente». Ne consegue che una scrittura del tipo

$$t = 25°\mathrm{C}$$

non ha la stessa valenza di

$$L = 25\ \mathrm{m} \quad \mathrm{o} \quad m = 25\ \mathrm{kg}.$$

Non significa, infatti, che la temperatura è 25 volte la temperatura di 1°C; ma solamente che, nel termometro a mercurio, la colonna si ferma in una posizione che si trova a ¼ della distanza che separa le due di riferimento.

4. $F \overset{?}{=} m\,a$

Abbiamo osservato che, generalmente, una legge fisica è una correlazione matematica tra *due* grandezze. Per esempio, la legge di caduta dei gravi (3) asserisce la proporzionalità tra lo spazio percorso e il quadrato del tempo impiegato. Se vogliamo passare ad una enunciazione che utilizzi il segno di uguaglianza dobbiamo introdurre una terza grandezza – l'accelerazione – che, con le sue dimensioni fisiche, ci ricorda la sua origine.

La legge di Stephan afferma che la potenza radiante di una superficie è proporzionale alla quarta potenza della temperatura:

$$B \propto T^4\ . \tag{23}$$

Il passaggio ad una formulazione che sia un'uguaglianza comporta l'introduzione di una terza grandezza:

$$B = \sigma\, T^4 \tag{24}$$

le cui dimensioni

$$[\sigma] = \left[\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{K}^4}\right]$$

ne denunciano il significato fisico. Tuttavia, non sempre è facile (e possibile) riconoscere la natura di un'uguaglianza. L'esempio più significativo è rappresentato dalla legge più popolare della fisica scolastica:

$$F = m\,a \tag{25}$$

di frequente la sola che rimanga nella memoria di chi ha seguito un corso di fisica elementare.

L'enunciato è unico, ma il significato varia a seconda del contesto. Una prima lettura è la seguente: la legge afferma una proporzionalità tra la forza applicata ad un corpo e l'accelerazione. Il che presuppone che la forza sia stata definita in modo indipendente. Generalmente si fornisce una definizione operativa di natura statica, cioè attraverso fili e molle. Se la scelta è questa, la massa acquista il significato di fattore di proporzionalità tra la forza e l'accelerazione:

$$[m] = \left[\frac{\text{forza}}{\text{acc}}\right].$$

Un'alternativa è definire la massa operativamente tramite la bilancia o, meglio, attraverso l'urto con una massa campione. In tal caso è la forza che risulta definita come fattore della proporzionalità (inversa) tra massa ed accelerazione.

Una terza opzione consiste nel definire indipendentemente tutte e tre le grandezze (forza, massa e accelerazione) ed asserire che tra di esse sussiste una relazione:

$$F = k\,m\,a\,. \tag{26}$$

Far scomparire il fattore di proporzionalità che accompagna l'enunciazione con il segno di uguaglianza non è un problema: basta scegliere opportunamente le unità di misura. Rimane tuttavia il fatto che si tratta di un'unità dotata di dimensioni fisiche:

$$[1] = \left[\frac{\text{forza}}{\text{massa} \times \text{acc}}\right].$$

Nelle sue *Lectures of Physics*, Richard Feynman espone chiaramente come stanno le cose: «The real content of Newton's laws is this: that the force is supposed to have some *independent properties*, in addition to the law $F = m\,a$; but the *specific* independent properties that the force has were not completely described by Newton or by anybody else, and therefore the physical law $F = m\,a$ is an incomplete law».

Infatti, risulta difficile ricondurre alle opzioni che abbiamo ricordato la legge del moto in campo gravitazionale o in campo magnetico (la forza di Lorentz).

Nei manuali scolastici e nella pratica dell'insegnamento non si guarda tanto per il sottile. E a ragione, poiché l'apprendimento non segue strade razionali. "Apprendere" significa soprattutto "imparare ad usare" le strutture concettuali; solo in un secondo momento arrivano le esigenze di sistemazione razionale, come ci ricordava la riflessione del matematico. Ciò non toglie che sarebbe auspicabile che gli insegnanti avessero consapevolezza della struttura concettuale che sostiene lo strato sottile della fisica scolastica.

Cultura è quella cosa che i più ricevono, molti trasmettono e pochi hanno.

La guerra in un primo momento è la speranza che a uno possa andar meglio, poi l'attesa che all'altro vada peggio, quindi la soddisfazione perché l'altro non sta per niente meglio e infine la sorpresa perché a tutti e due va peggio.

Riguardo all'invenzione della polvere da sparo e dell'inchiostro da stampa ciò che andrebbe subito ammesso è il notevole significato che la simultaneità della loro invenzione ha avuto per il genere umano.

Karl Kraus, *Detti e contraddetti*, traduzione di Roberto Calasso, Bompiani, Milano 1987; Adelphi, Milano 1992