

Titius e Bode contro Keplero: un’attività didattica sul concetto di legge fisica

(Pervenuto il 9.10.01, approvato il 22.03.02)

ABSTRACT

The law of Titius and Bode is presented and the meaning of the word “law” is discussed. A comparison is drawn with Kepler’s third law and several school applications are examined.

Introduzione

La “legge” di Titius e Bode sulle distanze planetarie viene di solito riportata nei manuali di geografia astronomica che non hanno remore a riconoscerle dignità pari alle leggi di Keplero o alla legge di gravitazione universale. È invece (mi)sconosciuta nei testi di fisica che pure si occupano della meccanica del sistema solare. Proprio questa duplicità di carattere conferisce alla relazione grande interesse didattico. Consente infatti di porre il problema della natura delle leggi fisiche non in astratto, come solitamente avviene nei corsi di filosofia, ma con semplicità e fondatezza; favorendo anche il ripensamento sul significato delle proposizioni scientifiche e sulla loro relazione con le osservazioni sperimentali. Fornisce agli insegnanti l’occasione per un salutare ripensamento sulla fondatezza di alcuni assiomi di natura epistemologica, non espliciti, ma tacitamente assunti nell’attività didattica, secondo i quali le leggi fisiche hanno la loro giustificazione in quella che si chiama *evidenza sperimentale*. La relazione di Titius e Bode può essere anche il pretesto per un salutare ripensamento del concetto di legge fisica. Questa denominazione viene attribuita, nei manuali scolastici, a qualsiasi relazione tra grandezze fisiche. Già il termine usato – “legge” – semanticamente è tutt’altro che neutro, anzi pesantemente marcato da connotazioni positivistiche, in base alle quali le “leggi” sono scritte nella natura ed hanno una loro esistenza indipendente da quella di un osservatore razionale. Compito del fisico sarebbe quindi quello di “scoprire le leggi naturali” così come l’archeologo scopre la necropoli sepolta dalla sabbia. Un’attività didattica centrata sul confronto tra la legge di Titius

e Bode e la terza legge di Keplero, che le è affine per l’oggetto fisico a cui si riferisce e l’origine empirica, offre lo spunto per il superamento di un atteggiamento molto ingenuo e diffuso sulla natura della conoscenza scientifica.

La legge di Titius e Bode

I raggi medi delle orbite dei pianeti classici sono riportati in Tabella 1, dove si è assunta come unità di distanza l’Unità Astronomica, ovvero la distanza della Terra dal Sole ($1,49 \times 10^{11}$ m).

Tabella 1 [1]

MERCURIO	0,387
VENERE	0,723
TERRA	1
MARTE	1,524
GIOVE	5,203
SATURNO	9,539

Queste misure si possono approssimare con la successione di numeri

0,4	0,7	1	1,6	5,2	10
-----	-----	---	-----	-----	----

che sono esattamente descritti dalla relazione

$$d(n) = 0.4 + 0.3 \cdot 2^n \quad (1)$$

dove il parametro n è un numero intero al quale si attribuiscono i valori

$$n = -\infty, 0, 1, 2, 4, 5 \quad (2)$$

Questa, che va sotto il nome di *Legge di Titius e Bode*, ha avuto un ruolo importante nella storia delle scoperte planetarie (Urano, Cerere).

Salta subito agli occhi che, nella successione (2) dei valori interi da attribuire al parametro n manca il 3 che, inserito nella (1) produrrebbe una distanza di 2,8 UA che non corrisponde ad alcun pianeta.

Nota storica

Gli esperimenti falliti, le idee messe da parte, i modelli fisici sconfitti sono materiali preziosi per l'insegnamento, per diversi motivi: mostrano "di che lacrime grondi" anche la ricerca scientifica e che le idee scientifiche non sono mai definitivamente morte. Nel caso della "legge" di Titius e Bode il testo storico fondamentale è quello di Nieto [2] che, però, non ha avuto una edizione italiana. L'idea che vi sia una razionalità dietro la distribuzione delle distanze dei pianeti dal Sole si può far risalire a Keplero [3]. Egli, nella ricerca di questa "armonia", formulò l'ipotesi che le orbite planetarie siano disposte su superfici sferiche concentriche connesse tra loro dal fatto di essere inscritte e circoscritte a poliedri regolari: cubo, tetraedro, dodecaedro, icosaedro ed ottaedro. La giustificazione che sosteneva l'ipotesi di Keplero era di natura mistica e non concordava con le determinazioni più accurate delle misure e, pertanto, venne abbandonata. Il primo libro in cui compare la legge di Titius e Bode è un trattato generale di scienze dello svizzero Bonnet: *Contemplation de la nature* (1764). Il libro ebbe grande successo e fu tradotto anche in italiano da Lazzaro Spallanzani. In tedesco fu tradotto, nel 1766, da Johann Daniel Titius (latinizzazione del tedesco Tietz, 1729-1796), professore all'università di Wittenberg. Nel libro solo poche pagine sono dedicate all'astronomia e a queste Titius aggiunse, di suo, alcune note. Una di queste è proprio la relazione (1). Si serviva poi di questa per ipotizzare l'esistenza di un altro corpo celeste tra Marte e Giove – quello caratterizzato dal numero 3 nella formula (1) – al quale non riconosceva, tuttavia, natura planetaria. Il primo testo di astronomia in cui compare esplicitamente l'ipotesi di Titius uscì nel 1772, per opera di Johann Elert Bode (1747-1826), professore all'università di Berlino e astronomo di fama. Questo spiega perché fino alla metà dell'800 la (1) venne indicata col solo nome di Bode. Il fatto che in quegli anni si cercasse una relazione tra

una grandezza fisica (la distanza dei pianeti dal Sole) e i numeri interi, era una linea (oggi si direbbe *un programma*) di ricerca che Keplero aveva battuto invano. Ma in chimica aveva dato risultati importanti: in quegli anni John Dalton aveva enunciato la legge delle proporzioni multiple per i composti chimici, nella quale entravano i numeri interi "generalmente piccoli".

La prima, inaspettata, verifica della legge venne dalla scoperta di un settimo pianeta oltre Saturno a cui fu dato il nome di Urano. Per la verità il suo scopritore, Herschel nel 1781, lo aveva preso per una cometa, e furono i matematici Lexell e Laplace che ne riconobbero la natura planetaria. Il semiasse maggiore dell'orbita di Urano venne determinato pari a 19,18 UA, che è in ottimo accordo con il valore (19,6) che si ottiene inserendo $n=6$ nella relazione (1). La scoperta, intesa come conferma della legge, pose in maggior evidenza la mancanza, nell'elenco dei pianeti, di quello a cui dovrebbe corrispondere il numero 3. In Germania venne costituito un comitato dei maggiori astronomi ai quali fu affidato il compito di scovare il pianeta mancante tra Marte e Giove. La scoperta fu compiuta invece da padre Piazzi, all'osservatorio di Palermo, il primo gennaio del 1801: si trattava di Cerere, il primo asteroide osservato. Anche in questo caso, Piazzi lo scambiò per una cometa; ma fu Gauss a determinarne i parametri dell'orbita e a riconoscerne la natura planetaria. Storicamente, è un fatto importante, perché il metodo dei minimi quadrati fu messo a punto da Gauss allo scopo di elaborare i dati osservativi di Piazzi. Il raggio medio dell'orbita di Cerere intorno al Sole risultò pari a 2,78 UA, valore che era, ancora una volta, in ottimo accordo con quello che viene dalla (1) per il valore 3 del parametro n , cioè 2,8. Nei primi anni del secolo vennero scoperti molti altri pianetini (Pallade, Giunone, Vesta, ecc) l'orbita dei quali ha all'incirca lo stesso raggio di quello di Cerere.

Uno dei capitoli più affascinanti della storia dell'astronomia è la scoperta di Nettuno nel 1846. In questa impresa il francese Leverrier batté sul tempo l'inglese Adams, il quale aveva correttamente calcolato le coordinate del nuovo pianeta, ma non le aveva pubblicate a causa delle riserve che l'astronomo Airy manteneva sui suoi risultati. Queste riserve avevano origine dalla totale sfiducia che egli nutriva nei confronti

della nostra legge e che esprimeva con parole molto significative dal punto di vista epistemologico: *a law for which no physical theory of the rudest kind has never been suggested*. Alla fine risultò che il raggio medio dell'orbita era circa 30 UA. Se si inserisce $n=7$ nella relazione (1), si ottiene 38,8, con una differenza importante rispetto al dato misurato.

La scoperta di Plutone, avvenuta nel 1930 per opera di C.W. Tombaugh, diede il colpo definitivo alla legge (almeno per quanto riguarda i pianeti più esterni) in quanto il valore osservato per la distanza media (39 UA) è totalmente in disaccordo con quello prodotto dalla (1) per $n=8$: 77,2 UA. Inoltre, la notevole eccentricità dell'orbita di Plutone fa sì che la distanza vari da 30 UA a 49 UA, per cui risulta difficile attribuire un significato univoco al concetto di "distanza media". Tuttavia, il fatto che Plutone non ubbidisca alla legge di Titius e Bode potrebbe essere dovuto al fatto che questo pianeta, così lontano dal Sole, abbia un'origine diversa da quella degli altri, più vicini.

Attività didattica

Gli studenti hanno a disposizione la Tabella 2 sulla quale sono riportati i raggi delle orbite planetarie e periodi di rivoluzione:

Tabella 2 (dei pianeti) [4]

PIANETA	RAGGIO (UA)	PERIODO (anni)
MERCURIO	0,387	0,241
VENERE	0,723	0,615
TERRA	1	1
MARTE	1,524	1,881
GIOVE	5,203	11,86
SATURNO	9,539	26,46
URANO	9,539	26,46
NETTUNO	30,06	164,8
PLUTONE	39,44	247,7

Come prima cosa si invitano gli studenti a trovare una relazione empirica tra distanza media dal Sole e periodo di rivoluzione.

A questo scopo conviene passare ai logaritmi dei valori e riportarli in un grafico cartesiano,

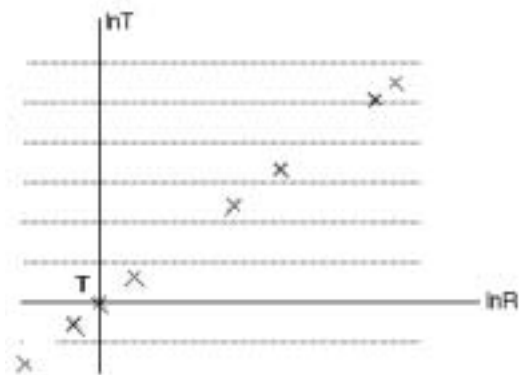


Figura 1. Relazione tra periodo e raggio dell'orbita per i pianeti. Il grafico è logaritmico.

come in Fig. 1. Il ricorso al grafico logaritmico è suggerito dalla necessità di rappresentare dati distribuiti su due ampi intervalli: il rapporto tra la distanza maggiore e la minore è circa 100; il rapporto corrispondente per i tempi è addirittura 1000.

Si verifica graficamente che i punti che si ottengono risultano disposti su una retta della quale è facile determinare i parametri. Per la sua equazione si ottiene

$$\ln T \cong 1,5 \ln R \tag{3}$$

È importante rendersi conto che il passaggio dalla (3) alla proposizione

$$T^2 = R^3 \tag{4}$$

che esprime la terza legge di Keplero, non è ovvio né obbligato.

[Abbiamo scelto questa rappresentazione della terza legge di Keplero (valida solo se si adottano le UA per la misura delle distanze e gli anni per la misura dei tempi) perché meglio pone in evidenza il carattere puramente numerologico della relazione, almeno fino al momento in cui non viene inserita in un contesto teorico].

La relazione (3), se valesse solo per i pianeti del sistema solare, sarebbe solo un modo sintetico di descrivere l'esistente. Ad una legge fisica chiediamo di più: che sia valida per qualsiasi altro pianeta del sistema solare e che sia valida per qualsiasi altro sistema. Un sistema analogo al solare è quello di Giove, per le cui lune riportiamo i dati di distanza e periodo nella Tabella 3.

Tabella 3 (delle lune di Giove) [5]

SATELLITE	PERIODO (giorni)	DISTANZA (raggio pianeta)
GIOVE V	0,498	2,53
IO	1,769	5,91
EUROPA	3,55	9,405
GANYMEDE	7,154	15
CALLISTO	16,69	26,39
GIOVE VI	250,6	160,8
GIOVE X	263,55	166
GIOVE VII	259,7	165
GIOVE XII	631,1	297
GIOVE XI	692,5	316
GIOVE VIII	738,9	329
GIOVE IX	758	332

Tabella 4 (dei satelliti di Saturno) [6]

SATELLITE	PERIODO (giorni)	DISTANZA (raggio pianeta)
Anello B	0,498	2,53
Anello A	1,769	5,91
MIMA S	3,55	9,405
ENCELADUS	7,154	15
TETHYS	16,69	26,39
DIONE	250,6	160,8
RHEA	263,55	166
TITANO	259,7	165
HYPERION	631,1	297
IAPETUS	692,5	316
PHOEBE	738,9	329

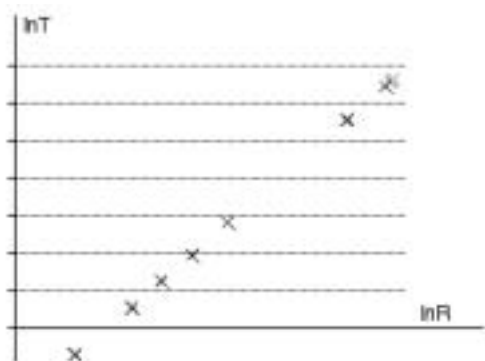


Figura 2. Relazione tra periodo e raggio dell'orbita per i satelliti di Giove. Il grafico è logaritmico.

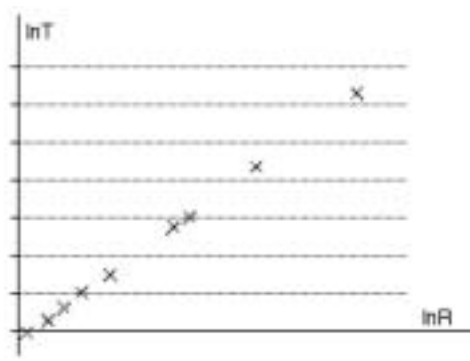


Figura 3. Rappresentazione grafica, in scala logaritmica, della relazione tra periodo e raggio dell'orbita per i satelliti di Saturno.

Il grafico logaritmico (Fig. 2) del periodo in funzione della distanza sembra confermare la dipendenza che già abbiamo trovato per i pianeti del sistema solare.

La procedura si può ripetere per il sistema dei satelliti di Saturno, del quale riportiamo i dati nella Tabella 4.

Ovviamente, anche in questo caso un grafico logaritmico è molto espressivo (Fig. 3).

I risultati ottenuti consentono di affermare che la relazione di Keplero descrive bene ciò che si osserva per il sistema solare e per i sistemi di Giove e di Saturno. Tuttavia, questo ci autorizza ad affermarne la validità universale?

Occupiamoci ora della legge di Titius e Bode. Abbiamo visto che descrive in maniera accetta-

bile le distanze dei pianeti fino ad Urano. Il fatto che le distanze di Nettuno e Plutone si discostino notevolmente da quanto è previsto dalla legge non è un argomento definitivo per il suo abbandono. Le discrepanze, infatti, potrebbero essere dovute ad altri motivi; per esempio, ad una diversa origine dei pianeti più esterni, rispetto agli altri più vicini al Sole. Inoltre, i valori delle costanti che compaiono nella (1) potrebbero riguardare solo il sistema solare; per altri sistemi i valori potrebbero essere diversi. Una generalizzazione possibile della legge di Titius e Bode è la seguente:

$$d(n) = a + b \cdot 2^n; \quad n = -\infty, 0, 1, 2, \dots \quad (5).$$

Se la legge di Titius e Bode fosse veramente una legge di natura dovrebbe descrivere anche

altri sistemi, oltre a quello solare. Dovrebbe essere applicabile, per esempio, al sistema di Giove e ad Io ed Europa dovrebbero corrispondere i valori 0 e 1 del parametro n , rispettivamente. Sostituendo i valori delle distanze riportate nella tabella e del parametro, si ottiene

$$\begin{cases} a + b = 5,91 \\ a + 2b = 9,405 \end{cases} \quad (6)$$

Risolvendo il sistema si trova $a = 2,415$ $b = 3,495$. La (5) assume quindi la forma

$$d(n) = 2,415 + 3,495 \cdot 2^n; \quad (7)$$

$$n = -\infty, 0, 1, 2, \dots$$

che produce i valori riportati in Tabella 5.

Tabella 5. Confronto tra i valori calcolati e le distanze reali dei satelliti di Giove.

SATELLITE	CALCOLATA	MISURATA
$-\infty$	3,49	2,53
0	5,91	5,91
1	9,4	9,405
2	16,4	15
3	30,36	26,39
4	58,3	160,8
5	114,17	166
6	225,9	165
7	449,3	297
8	896,1	316
9	1789,5	329
10	3576	332

Si può riprovare attribuendo il valore zero del parametro n ad Europa, invece che al satellite Io, o a Ganymede o a Callisto. Il risultato è lo stesso: enormi discrepanze rispetto ai valori osservati.

Vediamo che cosa succede con i satelliti di Saturno. Attribuendo il valore $n=0$ all'anello B, si ricava per la legge di Titius e Bode:

$$d(n) = 1,28 + 0,87 \cdot 2^n; \quad n = -\infty, 0, 1, 2, \dots \quad (8)$$

da cui si ricavano i valori riportati in Tabella 6.

Anche in questo caso le discrepanze sono inaccettabili, come nel caso di Giove. Naturalmente, nulla vieta di scegliere un'altra copia di satelliti di riferimento, e riprovarci.

Questi risultati sono sufficienti a negare definitivamente alla relazione di Titius e Bode la qualifica di "legge"?

Tabella 6. Confronto tra i valori calcolati e le distanze reali dei satelliti di Saturno.

SATELLITE	CALCOLATA	MISURATA
$-\infty$	1,28	1,72
0	2,15	2,15
1	3,02	3,02
2	4,76	3,95
3	8,24	4,88
4	15,2	6,25
5	29,1	8,73
6	56,9	20,2
7	112,5	24,53
8	223,7	59,01
9	446,1	215

Morale didattica

Abbiamo visto che la relazione di Titius e Bode nella formulazione (1) descrive in maniera accettabile la realtà fisica per i pianeti del sistema solare almeno fino ad Urano. Per Nettuno e Plutone le discrepanze tra i dati osservativi e le previsioni sono inaccettabili. Questo, tuttavia, non significa che non si possa trovare una relazione analitica tra numeri interi e distanze che descriva in maniera accettabile ciò che si osserva. Tutto ciò equivale ad affermare che è sempre possibile determinare l'equazione di una curva che passi in modo accettabilmente vicino ai punti del grafico di Fig. 4.

Anzi, sono state proposte diverse relazioni di questo genere, nessuna delle quali ha assunto la

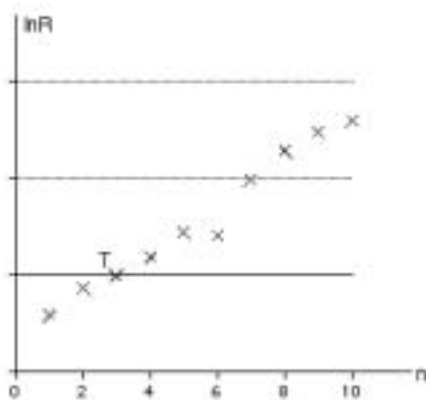


Figura 4. Relazione tra raggio dell'orbita e numero d'ordine per i pianeti.

dignità di legge fisica. Ciò non toglie che la relazione (1) non sia solo un modo sintetico di descrivere ciò che si osserva o, peggio, una pura questione di numerologia: si tratta di una vera e propria proposizione scientifica nel senso di Popper [7]. Infatti, l'associazione che viene stabilita tra pianeti e numeri interi sta a significare una cosa importante e precisa: che non vi possono essere pianeti, ad esempio, tra la Terra - per la quale $n=3$ - e Marte - per il quale $n=4$. Si tratta di un'affermazione per la quale non vi può essere un *cimento*. Infatti, possiamo solo osservare che un tale pianeta non esiste; ma non abbiamo alcuna possibilità di verificare sperimentalmente che un pianeta, in tale posizione, non può sussistere.

Sono altre le caratteristiche che impediscono di assumerla come legge fisica:

1) vale solo per il sistema solare e non è estensibile ad altri sistemi, come quelli di Giove e di Saturno;

2) non è in alcun modo inseribile nel contesto di una teoria meccanica più generale. In particolare, non è possibile farla discendere dalla meccanica newtoniana e dalla legge di gravitazione universale. Impossibilità denunciata anche dal fatto che la legge di Titius e Bode, nella quale hanno un ruolo i numeri interi, è, in qualche modo, "quantizzata". Questi non hanno alcun ruolo, al contrario, nella meccanica newtoniana che ha la propria collocazione nell'insieme dei numeri reali.

Ciò che sostiene la terza legge di Keplero, e ne fa una legge fisica nell'ambito della meccanica classica, è il fatto che è generale, cioè vale per tutti i sistemi legati da forze gravitazionali - Giove, Saturno, pianeti, comete, sistemi stellari, galassie - ed è deducibile dagli assiomi della meccanica e dalla legge di gravitazione di Newton. Infatti, la terza legge di Keplero si trova nei testi di meccanica; la "legge" di Titius e Bode non vi compare.

Da Popper abbiamo imparato che una proposizione, per essere definita scientifica, deve prestarsi ad essere falsificabile attraverso l'osservazione sperimentale. Tuttavia, questa è solo una

condizione necessaria, ma non sufficiente a che la proposizione sia una legge. Una proposizione isolata da un contesto teorico non può essere una legge fisica: assume questo *status* solo se è interpretabile all'interno di una teoria e deducibile dal sistema assiomatico connesso, magari con l'aggiunta di qualche altra ipotesi.

Nel caso della relazione di Keplero è legittimo indicarla come legge non solo perché si accorda con ciò che si osserva; ma perché si inserisce in maniera perfetta all'interno del sistema assiomatico newtoniano (con l'aggiunta dell'ipotesi gravitazionale). Per la "legge" di Titius e Bode, nonostante gli sforzi di tanti studiosi di meccanica celeste, nessuno è riuscito a mostrare che la relazione (o una sua generalizzazione) si possa far discendere, per necessità logica, dai fondamenti dello stesso paradigma [8].

Ringraziamenti

Gli autori ringraziano l'anonimo referee per le appropriate osservazioni e gli utili suggerimenti.

Bibliografia

- [1] S. DE MEIS, J. MEEUS, *Almanacco Astronomico*, Hoepli, Milano, 1997.
- [2] M.M. NIETO, *The Titius-Bode Law of Planetary Distances: Its History and Theory*, Pergamon, New York, 1972.
- [3] J.L.E. DREYER, *Storia dell'astronomia da Talete a Keplero*, Feltrinelli, Milano, 1970.
- [4] S. DE MEIS, J. MEEUS, *op.cit.* Appare didatticamente opportuno parlare di distanze medie dal Sole, piuttosto che di semiasse maggiori delle orbite, perché le tabelle dei manuali di astronomia riportano di solito o tali distanze (definendole sommariamente medie), oppure le distanze in afelio e in perielio.
- [5] M. RIGUTTI (a cura di), *Il sistema solare*, Corso Editore, Ferrara, 1984.
- [6] M. RIGUTTI (a cura di), *op. cit.*
- [7] K.R. POPPER, *Logica della scoperta scientifica*, Giulio Einaudi Editore, Torino, 1970.
- [8] T.S. KUHN, *La struttura delle rivoluzioni scientifiche*, Giulio Einaudi Editore, Torino, 1978.