AGNESE BERRA*, LEDO STEFANINI+
** Liceo "M. Fanti", Modena*
+ Ingegneria dell'ambiente e delle risorse, Università di Mantova

La bicicletta di Einstein

(Pervenuto il 14.1.00, approvato il 22.9.00)

ABSTRACT
The physics of bicycle riding lends itself to simple discussions that might be useful for teaching. The article offers two examples on curving. The first example concerns the relationship between the radius of the curve, the angle the handle bar is turned and the length of the bike. As a matter of fact, when curving the length of the bike is a factor of stability. The second concerns the relationship between the radius of the curve and the speed of the bike. The inspiration came from a picture of Albert Einstein on a bicycle: what was his speed when the picture was taken?

Vi è una famosa fotografia che riprende Einstein in bicicletta in una strada di Pasadena. L'espressione del viso del ciclista trasmette il senso della gioia infantile che ricavava da quell'esercizio che praticava abitualmente. E non appaia irriverente l'aggettivo dato che il sommo scienziato ha in diverse occasioni assimilato a quella del bambino la meraviglia dello scienziato di fronte ai fenomeni naturali.

Fig. 1. Albert Einstein in una strada di Pasadena negli anni '40.(Courtesy of the Archives, California Institute of Technology, Pasadena, Cal.)

Intento di questo lavoro non è quello di trattare la meccanica della bicicletta – argomento sul quale, a partire dal fondamentale studio di Whipple [1], si sono cimentati in molti; ma semplicemente di sviluppare alcune considerazioni sul moto della bicicletta che, in quanto elementari, presentano vari aspetti interessanti dal punto di vista didattico. Risulta infatti naturale interrogarsi sull'efficacia e le finalità dei nostri corsi elementari (ma anche universitari) di fisica, che non hanno remore ad affrontare la meccanica del sistema solare, ma lasciano ai meccanici la meccanica della bicicletta: troppo difficile.

Nella I sezione ricaveremo due espressioni che mettono in relazione i raggi di curvatura delle traiettorie delle due ruote con l'angolo di sterzata e le dimensioni della bicicletta. Nella II sez. mostreremo come le relazioni valgano anche nel caso in cui la bicicletta si inclini nel fare la curva, come di solito avviene. Nella III sez. ricaveremo una relazione che connette la velocità della bicicletta con il raggio della curva. La sez. IV vuole studiare in che modo le dimensioni – della bicicletta e del ciclista – influiscano sulla stabilità dell'equilibrio. Infine, nella sez. V ci proponiamo di rispondere al seguente – venale – quesito:

Qual era la velocità di Einstein nel momento della ripresa della fotografia?

I. I raggi della curva

Parliamo di raggi (al plurale) perché una bicicletta in curva descrive due archi di circonferenza: uno la ruota posteriore ed uno, più grande, l'anteriore. I due archi hanno un comune centro di curvatura: l'intersezione delle normali ai piani delle ruote (Fig. 2).

I raggi di curvatura dipendono da due parametri: l'angolo di sterzata σ del manubrio e la distanza D tra i mozzi delle ruote. I punti di contatto con il terreno giacciono su due circonferenze concentriche, in ogni punto tangenti ai piani delle ruote.

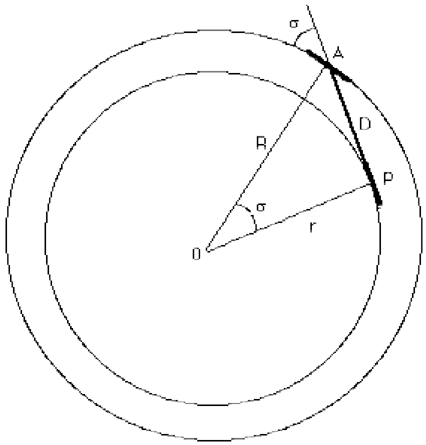


Fig. 2. Le ruote di una bicicletta con il manubrio sterzato descrivono due circonferenze concentriche. *A* indica il punto di contatto tra la ruota anteriore e il terreno; *P* l'analogo per la posteriore; *D* la distanza (costante) tra i due punti; *r* il raggio del cerchio descritto dalla ruota posteriore ed *R* il raggio del cerchio descritto dalla ruota anteriore. *O*, centro comune delle circonferenze, è il punto in cui si intersecano le normali ai piani delle ruote condotte per *A* e *P*.

Assegnata che sia la distanza *D* tra i mozzi delle ruote, per ogni angolo σ di sterzo, risultano determinati i raggi delle circonferenze descritte dalle ruote:

$$R = \frac{D}{\sin\sigma} \qquad r = \frac{D}{\tan\sigma} \tag{1}$$

o anche

$$r = R\cos\sigma \tag{2}$$.

Per una normale bicicletta da adulti la distanza tra i mozzi è circa 110 cm. Ad un angolo di sterzo di 2° corrispondono i raggi di curvatura

$$R \cong 31{,}52 \text{ m}; \; r \cong 31{,}50 \text{ m}.$$

A 10° corrispondono i raggi di curvatura

$$R \cong 6{,}33 \text{ m}; \; r \cong 6{,}24 \text{ m}.$$

Se le due ruote non strisciano sull'asfalto, in curva le loro velocità sono leggermente diverse. Indicando con Ω la comune velocità angolare con cui si spostano rispetto al centro della curva, sarà

$$V_a = \Omega R \qquad V_p = \Omega r$$

dove i suffissi indicano la ruota anteriore e la posteriore. Se i raggi delle ruote sono uguali, sarà anche

$$V_a = \omega_a \rho \qquad V_p = \omega_p \rho$$

avendo posto ρ ad indicare il raggio delle ruote.

Dal confronto deriva

$$\frac{\omega_p}{\omega_a} = \frac{r}{R} = \cos\sigma \tag{3}$$

che ci spiega perché la gomma della ruota anteriore si consuma sempre più della posteriore.

II. Curva con bicicletta inclinata

I risultati che abbiamo ricavato sono stati ottenuti nell'ipotesi di una bicicletta che curva restando perfettamente verticale. Sappiamo che non può essere una situazione verosimile: chiunque compia una curva in bicicletta si inclina in direzione del centro di curvatura, per evitare di cadere dalla parte opposta. Tuttavia, le conclusioni che abbiamo raggiunto non sono granché diverse da quelle a cui si perviene tenendo conto dell'inclinazione del piano della bicicletta. Consideriamo la ruota anteriore, inizialmente sul piano verticale della bicicletta. Ruotiamo ora il manubrio di un angolo σ e poi incliniamo il piano della bicicletta di un angolo i rispetto alla verticale. Il piano della ruota interseca il pavimento secondo una retta che, rispetto alla congiungente i punti di contatto delle ruote, forma un angolo Σ maggiore di σ. Precisamente, vale la relazione

$$\tan\Sigma = \frac{\tan\sigma}{\cos i} \geq \tan\sigma \tag{4}$$

che ricaviamo in Appendice 1.

PROBLEMA

Su una strada fangosa una bicicletta ha lasciato la traccia di figura 3.

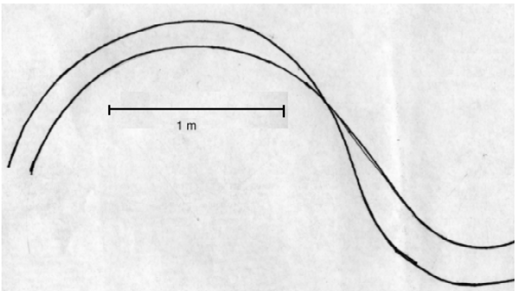


Fig. 3. Tracce lasciate dalle ruote di una bicicletta su un piano orizzontale.

Si vuole sapere se la bicicletta andava verso destra o verso sinistra e se si tratta di una bicicletta da adulto o da bambino. Ovvero, si vuole determinare la distanza tra i mozzi delle ruote.

Pertanto, nelle formule della precedente sezione dobbiamo sostituire Σ a σ, con la conseguenza che i raggi di curvatura diventano

$$R' = \frac{D}{\sin \Sigma} < R \qquad r' = \frac{D}{\tan \Sigma} < r \qquad (5).$$

Per avere un'indicazione sull'entità della correzione, possiamo osservare che

$$r' = \frac{D}{\tan \Sigma} = \frac{D}{\tan \sigma} \cos i = r \cos i.$$

Con un'inclinazione di 10°, la correzione è inferiore al 2%.

Possiamo pertanto concludere che le formule (1) forniscono i raggi di curvatura delle tracce delle ruote con ottima approssimazione anche nel caso in cui si tenga conto dell'inclinazione della bicicletta.

III. Perché la direzionalità della ruota anteriore è essenziale per l'equilibrio

Una bicicletta in moto gode della nota proprietà di stabilità grazie al fatto che si può sterzare la ruota anteriore.

Assimiliamo ciclista e bicicletta ad una sbarra di massa M e lunghezza $2L$, incernierata al piano d'appoggio. Poniamo che la sbarra sia inclinata di un angolo i rispetto alla verticale. Lasciata libera, la sbarra, ovviamente, cadrebbe; ma questo si può evitare imprimendo al sistema un'opportuna accelerazione nel verso della caduta. È quello che facciamo quando manteniamo in equilibrio una scopa sul dito di una mano: quando avvertiamo che sta cadendo, ad esempio, verso sinistra, spostiamo rapidamente la mano nella stessa direzione. Nel sistema di riferimento solidale con il punto d'appoggio, sulla sbarra agisce, oltre al peso, anche una forza apparente, diretta in senso opposto a quello di caduta, di intensità Ma, se a indica l'accelerazione.

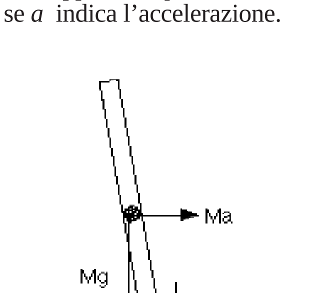


Fig. 4. Una sbarra appoggiata può restare in equilibrio anche fuori dalla verticale (se soggetta anche ad una opportuna forza apparente).

La sbarra ritorna verso la verticale se il momento della forza apparente rispetto al punto d'appoggio è maggiore del momento della forza peso:

$$MaL \cos i > MgL \sin i$$

ovvero se

$$a > g \tan i \qquad (6).$$

Questo è appunto ciò che accade con la bicicletta. Se il ciclista sente che sta cadendo, verbigrazia verso sinistra, immediatamente gira lo sterzo in quella direzione. In questo modo percorre una curva e genera una forza centrifuga che lo riporta in posizione verticale. Se r indica la distanza del punto di appoggio dell'asta dall'asse di rotazione e V la sua velocità, l'accelerazione è

$$\frac{V^2}{r}$$

In tal caso, per riportare la sbarra in posizione verticale è sufficiente che

$$\frac{V^2}{R} > g \tan i \qquad (7).$$

Perché questo avvenga devono essere soddisfatte alcune condizioni:

1) la risposta all'inizio della caduta dev'essere sufficientemente rapida,

2) la velocità dev'essere sufficientemente elevata,

3) l'angolo di sterzata dev'essere adeguato.

Le tre variabili non sono, tuttavia, indipendenti; il raggio di curvatura è legato all'angolo di sterzata dalla relazione (1) per cui la precedente diventa

$$\tan \sigma \, V^2 > Dg \tan i \qquad (8)$$

che, per gli angoli piccoli, si riduce a

$$\sigma > \frac{Dg}{V^2} i \qquad (8').$$

Questa notevole relazione ci dice che:

1) Fissate le dimensioni della bicicletta e l'ampiezza dell'angolo i che si deve correggere, l'angolo di sterzata è tanto minore quanto maggiore è la velocità. Per esempio, per correggere una deviazione dalla verticale di 10°, andando alla velocità di 36 km/h, basta una sterzata di 0,6°. Se invece la velocità è 10 km/h, occorre una sterzata di 8° almeno. Nel primo caso il raggio di curvatura è grande (57 m), nel secondo molto minore: circa 4 m solamente.

2) Le dimensioni della bicicletta influiscono sull'entità della sterzata. A parità di velocità, l'angolo di sterzata è proporzionale alle dimensioni; che è come dire che, se la velocità è la stessa, un bambino deve sterzare meno di un adulto per correggere un principio di caduta.

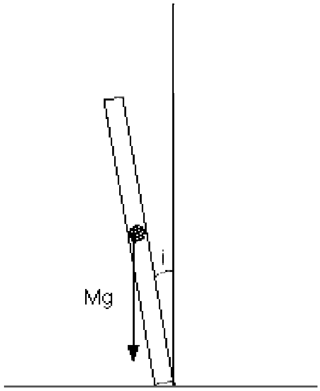


Fig. 5. Una sbarra appoggiata su un piano scabro in fase di caduta.

IV. Il tempo di caduta

La possibilità di restare in equilibrio sulla bicicletta in moto, basata sulla possibilità di correggere un certo angolo di scostamento dalla verticale, richiede che la caduta avvenga in tempi maggiori dei tempi di reazione del ciclista.

Consideriamo una sbarra pesante appoggiata sul terreno (scabro) che forma un certo angolo i con la verticale (vedi Fig. 5).

Abbandonata a se stessa, la sbarra comincia a cadere ruotando intorno al punto d'appoggio. Vogliamo calcolare quanto tempo impiega a passare dall'angolo i ad un generico angolo φ.

A questo scopo, conviene, per una generica posizione ϑ, prendere in considerazione l'energia cinetica acquisita dall'asta

$$\frac{1}{2}I\omega^2$$

e l'energia gravitazionale perduta

$$Mg\frac{L}{2}\cos i - Mg\frac{L}{2}\cos\vartheta\,.$$

La conservazione dell'energia impone che

$$Mg\frac{L}{2}(\cos i - \cos\vartheta) = \frac{1}{2}\frac{1}{3}ML^2\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 \qquad (9)$$

da cui

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \sqrt{\frac{3g(\cos i - \cos\vartheta)}{L}}\,.$$

Integrando si ottiene

$$t = \sqrt{\frac{L}{3g}}\int_i^{\varphi}\frac{d\vartheta}{\sqrt{\cos i - \cos\vartheta}} \qquad (10).$$

Questo rappresenta il tempo impiegato nella caduta dall'inclinazione i alla φ. Osserviamo che, se i =0, si tratta di un integrale divergente: cioè, se la posizione di partenza tende alla verticale, il tempo di caduta tende all'infinito (questo viene dimostrato in Appendice 2), il che significa che la sbarra impiega molto ad allontanarsi dalla verticale. Ma ciò che ci interessa è che, a parità delle altre condizioni, il tempo di caduta è proporzionale alla radice della lunghezza. Quindi, prese due aste, l'una di lunghezza quadrupla rispetto all'altra, ed egualmente inclinate, quella più corta impiega un tempo metà a compiere una rotazione di determinata ampiezza. Si tratta della vecchia legge galileiana del pendolo. Questo spiega come mai è facile mantenere in equilibrio sulla mano una lunga sbarra, mentre è estremamente difficile fare lo stesso con una matita. Ci dice anche che, a parità di tempo di reazione, un bambino in bicicletta deve compensare angoli (φ) di caduta maggiori e quindi, poiché la sua velocità è generalmente più bassa, deve compiere, in base alla (8), sterzate di maggiore ampiezza, rispetto ad un adulto.

V. La velocità di Einstein

La ripresa frontale permette di misurare facilmente sia l'inclinazione della bicicletta rispetto alla verticale che l'angolo di sterzata.

L'inclinazione rispetto alla vericale risulta di circa 12°.

L'angolo σ di sterzata si ricava dal rapporto delle dimensioni apparenti della ruota:

$$\sin\sigma = \frac{\textit{diametro minore}}{\textit{diametro maggiore}}\,.$$

Il valore che si ottiene è

$$\sigma \cong 13°.$$

A questo punto abbiamo i dati da inserire nella formula (8):

$$V > \sqrt{\frac{Dg\tan i}{\tan\sigma}} \cong 3{,}2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cong 11{,}5\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$$

avendo ipotizzato per D un valore di circa 1,1 m.

Appendice 1

Consideriamo la ruota anteriore di una bicicletta di raggio unitario riferita ad una terna cartesiana di figura 6.

Ruotiamo la ruota di un angolo σ intorno all'asse z. Il piano di equazione

$$y = 0$$

nella rotazione assume la forma

$$y = \tan\sigma\, x.$$

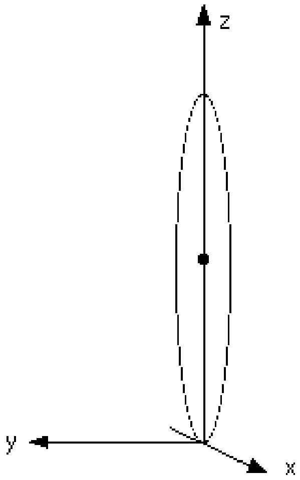


Fig. 6. Ruota anteriore della bicicletta nella posizione di partenza. Subisce poi due rotazioni: una intorno all'asse *z* e una intorno all'asse *x*.

Facciamo ora una rotazione di ampiezza i intorno all'asse x. Le equazioni della rotazione sono

$$y = y' \cos i - z' \sin i$$
$$z = y' \sin i + z' \cos i$$
$$x = x'.$$

Con ciò l'equazione del piano diventa

$$y' \cos i - z' \sin i = \tan\sigma\, x'.$$

Questo interseca il piano xy lungo la retta di equazione

$$y' = \frac{\tan\sigma}{\cos i} x'$$

che, rispetto all'asse x ha un'inclinazione

$$\tan\Sigma = \frac{\tan\sigma}{\cos i} \quad .$$

Appendice 2

L'integrale (10) è divergente per $i = 0$. Infatti

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1-\cos\vartheta}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\varphi} \frac{d\vartheta}{\sin\frac{\vartheta}{2}} > \sqrt{2} \int_0^{\varphi} \frac{d\vartheta}{\vartheta}$$

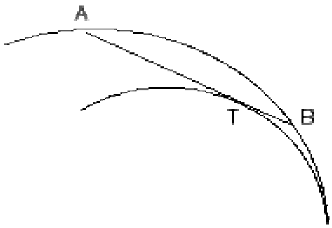
dove l'ultimo diverge.

Bibliografia

[1] F.J. WHIPPLE, *Q. J. Pure Appl. Math.*, 120 (1899).

SOLUZIONE DEL PROBLEMA PROPOSTO

La traccia lasciata dalla ruota posteriore è sempre quella interna alla curva, ovvero il suo raggio di curvatura è il minore dei due. La tangente alla traccia della ruota posteriore in un suo punto T interseca quella dell'anteriore in due punti A e B:



Solo uno dei due segmenti AT e TB non varia di lunghezza al variare di T: quello che rappresenta la traccia della congiungente i mozzi delle ruote. Nel nostro caso la bicicletta va verso sinistra e la distanza dei mozzi è circa mezzo metro.

Per proporre il problema a scuola si può realizzare veramente una doppia traccia su un lungo foglio di carta steso sul pavimento mediante una bicicletta sulle cui gomme sia stato sparso inchiostro, utilizzando un pennello o un tampone.