G. DE VINCENZI, M. FRANCESIO
Istituto Tecnico Industriale "E. Fermi"
Mantova

PROBLEMI ED ESERCIZI
a cura di C. MARCHI TREVISI

Quattro masse e una bilancia

(Pervenuto il 31.1.91 - Approvato il 25.9.91)

ABSTRACT
The article presents the solution of an old problem about a pair of scales, known to be inaccurate, and four unknown masses.

1. BuKuLuPu

Una mattina dello scorso anno scolastico diversi colleghi del nostro Istituto, per lo più docenti di fisica e di matematica, ricevettero dal Preside il biglietto seguente.

"On a pair of scales known to be inaccurate Lu balances Ku, Ku and Bu together balance Lu, Lu and Bu together balance Pu, and Lu plus Ku balance Bu plus Pu.

When the scales are correctly adjusted it is found that Pu balances Lu and Ku.

What adjustment of the scales was made?"

Dopo un momento di sorpresa, e forse per qualcuno anche di smarrimento, si cercò di decifrare l'enigma traducendo il testo in italiano.

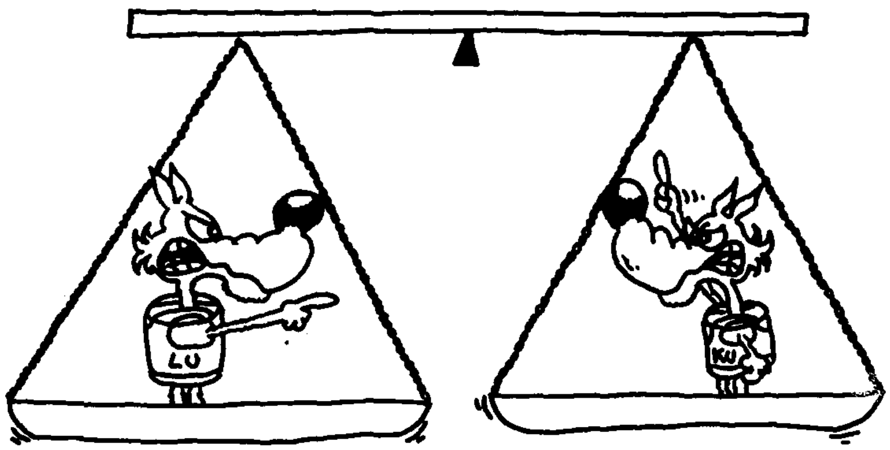
Esso suona pressappoco così:

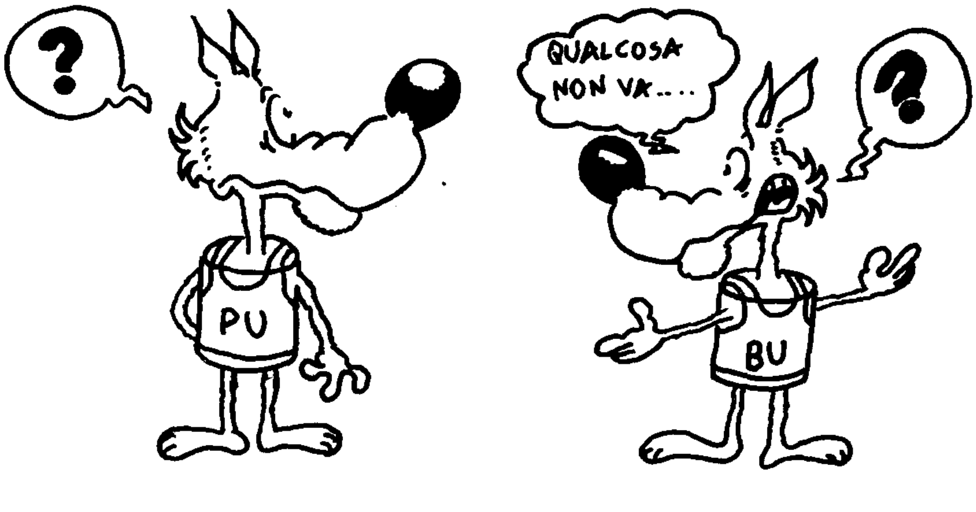
Su di una bilancia starata Lu equilibra Ku, Ku e Bu insieme equilibrano Lu, Lu e Bu insieme equilibrano Pu, ed Lu più Ku equilibrano Bu più Pu.

Quando la bilancia viene regolata in modo corretto si trova che Pu equilibra Lu e Ku.

Quale modifica è stata apportata alla bilancia?

Si trattava di un problema di meccanica trovato su un vecchio testo: qui di seguito ne viene discussa la risoluzione.





2. Analisi preliminare del problema

Supponiamo, innanzi tutto, che gli oggetti Bu, Ku, Lu e Pu siano reali e non le loro masse, che indicheremo rispettivamente con B, K, L e P, non nulle. La relazione di equilibrio verrà indicata con il simbolo $\leftrightarrow$ per distinguerla da quella di uguaglianza.

Le relazioni indicate nel testo del problema sono nell'ordine

$$\begin{aligned} \text{Lu} &\leftrightarrow \text{Ku} && (1)\\ \text{Ku} + \text{Bu} &\leftrightarrow \text{Lu} && (2)\\ \text{Lu} + \text{Bu} &\leftrightarrow \text{Pu} && (3)\\ \text{Lu} + \text{Ku} &\leftrightarrow \text{Pu} + \text{Bu} && (4)\\ P &= L + K && (5) \end{aligned}$$

senza che sia precisato su quale dei due piatti della bilancia gli oggetti vengono posti. Per il seguito converremo di considerare posti sul piattello di sinistra gli oggetti i cui nomi sono scritti al primo membro della relazione di equilibrio, sul piattello di destra quelli con i nomi al secondo membro.

Poiché la (5) è sempre vera, la condizione di equilibrio (4) può essere riscritta nella forma

$$\text{Pu} \leftrightarrow \text{Pu} + \text{Bu} \qquad (4')$$

che indica uno sbilanciamento dello strumento dalla parte sinistra.

È evidente che, se nella (4) si invertissero i due membri, per cui la condizione di equilibrio risulterebbe verificata con gli oggetti scambiati sui piattelli, lo stesso avverrebbe nella (4') e lo strumento risulterebbe sbilanciato a destra, anziché a sinistra. Tutto avverrebbe come se la bilancia venisse usata dal lato opposto. Poiché le nostre considerazioni non possono dipendere dal lato da cui si guarda la bilancia, continueremo nel seguito a considerare lo strumento sbilanciato a sinistra.

Se i bracci sono uguali lo strumento si comporta come se sul piattello di sinistra si trovasse una massa addizionale.

Se i bracci sono diseguali (*), poiché non si può escludere a priori la presenza di una massa addizionale su uno dei piattelli, vi sono tre possibilità:

- il braccio sinistro è più lungo del destro, con una massa addizionale a sinistra,
- il braccio sinistro è più lungo del destro, con una massa addizionale a destra,
- il braccio sinistro è più corto del destro, con una massa addizionale a sinistra.

È da escludere la possibilità che il braccio sinistro sia più corto del destro e vi sia una massa addizionale sul piatto di destra, perché in nessun caso lo strumento potrebbe risultare sbilanciato a sinistra.

(*) Qui e nel seguito non viene presa in considerazione una eventuale differenza di massa fra i due bracci, nell'ipotesi che essa sia trascurabile rispetto alle altre masse in gioco.

Dato che tutte le ipotesi considerate devono essere discusse, cominciamo ad esaminare quella che considera uguali i bracci della bilancia.

3. I bracci della bilancia non possono essere uguali

Dalla (4') si deduce che la massa addizionale sul piatto di sinistra vale B e ciò consente di tradurre in equazioni fra masse le relazioni di equilibrio.

Le prime due relazioni si presentano o nella forma indicata in (1) e (2), oppure con i due membri invertiti quando si scambiano gli oggetti sui piattelli, per cui possono verificarsi i seguenti quattro casi

$$\begin{array}{ll} \text{Lu} \leftrightarrow \text{Ku} & \text{Lu} \leftrightarrow \text{Ku} \\ \text{Ku} + \text{Bu} \leftrightarrow \text{Lu} & \text{Lu} \leftrightarrow \text{Ku} + \text{Bu} \\[6pt] \text{Ku} \leftrightarrow \text{Lu} & \text{Ku} \leftrightarrow \text{Lu} \\ \text{Ku} + \text{Bu} \leftrightarrow \text{Lu} & \text{Lu} \leftrightarrow \text{Ku} + \text{Bu} \end{array}$$

che si traducono rispettivamente nelle seguenti equazioni fra masse

$$\begin{array}{ll} L + B = K & L + B = K \\ K + 2B = L & L + B = K + B \\[6pt] K + B = L & K + B = L \\ K + 2B = L & L + B = K + B \end{array}$$

Si nota subito che in ciascuno dei casi considerati le due equazioni sono incompatibili fra loro, essendo $B > 0$, per cui bisogna escludere l'ipotesi che i bracci della bilancia siano uguali.

4. Quando i bracci sono diseguali

Se i bracci sono diseguali, indichiamo con x la lunghezza del braccio sinistro, con y quella del destro e con S la massa addizionale, supposta positiva o al più nulla. Considerando, come nel paragrafo precedente, le prime due relazioni articolate nei quattro casi possibili che si ottengono scambiando gli oggetti sui piattelli della bilancia, le corrispondenti equazioni dei momenti risultano

(A), con la massa addizionale sul piattello di sinistra,

$$\begin{array}{ll} (L+S)\cdot x = K\cdot y & (K+S)\cdot x = L\cdot y \\ (K+B+S)\cdot x = L\cdot y & (K+B+S)\cdot x = L\cdot y \\[6pt] (L+S)\cdot x = K\cdot y & (K+S)\cdot x = L\cdot y \\ (L+S)\cdot x = (K+B)\cdot y & (L+S)\cdot x = (K+B)\cdot y \end{array}$$

oppure

(B), con la massa addizionale sul piattello di destra,

$$\begin{array}{ll} L\cdot x = (K+S)\cdot y & K\cdot x = (L+S)\cdot y \\ (K+B)\cdot x = (L+S)\cdot y & (K+B)\cdot x = (L+S)\cdot y \\[6pt] L\cdot x = (K+S)\cdot y & K\cdot x = (L+S)\cdot y \\ L\cdot x = (K+B+S)\cdot y & L\cdot x = (K+B+S)\cdot y \end{array}$$

Esaminando uno per uno i quattro casi (A), nell'ipotesi che sia $x > y$, si trova che

- nel primo, $L+S < K$ e quindi $K+B+S < L < L+S < K$, risultato impossibile;
- nel secondo, $(K+S)\cdot x = (K+B+S)\cdot x$ da cui $B = 0$ contro l'ipotesi $B > 0$;
- nel terzo, $K\cdot y = (K+B)\cdot y$ da cui $B = 0$ contro la medesima ipotesi;
- nel quarto, $K+S < L$ e quindi $K+S < L+S < K+B$, che fornisce $0 \leq S < B$, risultato possibile.

Esaminando uno per uno i quattro casi (B), sempre nell'ipotesi che sia $x > y$, si trova che
- nel primo, $L < K+S$ e quindi $K+B < L+S < K+2S$, che fornisce $B < 2S$, risultato possibile;
- nel secondo, $K\cdot x = (K+B)\cdot x$ da cui $B = 0$ contro l'ipotesi $B > 0$;
- nel terzo, $(K+S)\cdot y = (K+B+S)\cdot y$ da cui $B = 0$ contro la medesima ipotesi;
- nel quarto, $K < L+S$ e $L < K+B+S$ da cui $K < K+B+2S$, che fornisce $0 < B+2S$, risultato possibile.

Esaminando uno per uno i quattro casi (A), nell'ipotesi che sia $x < y$, si trova che
- nel primo, $L+S > K$ e $K+B+S > L$ da cui $K+B+2S > L+S > K$ che fornisce $B+2S > 0$, risultato possibile;
- nel secondo, $(K+B+S)\cdot x = (K+S)\cdot x$ da cui $B = 0$ contro l'ipotesi $B > 0$;
- nel terzo, $K\cdot y = (K+B)\cdot y$ da cui $B = 0$ contro la medesima ipotesi;
- nel quarto, $K+S > L$ e $L+S > K+B$ da cui $K+2S > L+S > K+B$, che fornisce $2S > B$, risultato possibile.

Va osservato che i risultati ottenuti dalla discussione degli ultimi quattro casi sembrano coincidere con quelli ottenuti dalla discussione dei quattro casi precedenti; tuttavia essi non sono equivalenti perché derivano da equazioni diverse.

Anche per la relazione (3) andrebbe presa in considerazione la possibilità di uno scambio degli oggetti sui piatti, per cui sarebbe

$$\mathrm{Pu} \leftrightarrow \mathrm{Lu} + \mathrm{Bu} \qquad (4'')$$

ma la (4″) conduce ad un assurdo. Infatti, confrontandola con la (4′), si ricaverebbe $L = P$, indipendentemente dai difetti della bilancia, e ciò contraddice la condizione $L < P$ deducibile dalla (5) quando $K > 0$.

Quest'ultima osservazione si rivela utile perché riduce ulteriormente le possibilità che rimangono da discutere.

In definitiva, si devono esaminare cinque casi:
- uno con $x > y$ e la massa S a sinistra, che indicheremo con a;
- due con $x > y$ e la massa S a destra che indicheremo con b1 e b2;
- due con $x > y$ e la massa S a sinistra, che indicheremo con c1 e c2.

Come vedremo nel prossimo paragrafo solo tre di questi casi sono effettivamente accettabili e conducono ad una soluzione del problema.

5. Le soluzioni del problema

A) Primo caso (si ottiene una soluzione)

Le equazioni dei momenti sono:

$$(K+S)\cdot x = L\cdot y \qquad (6a)$$

$$(L+S)\cdot x = (K+B)\cdot y \qquad (7a)$$

$$(L+B+S)\cdot x = P\cdot y \qquad (8a)$$

$$(P+S)\cdot x = (P+B)\cdot y \qquad (9a)$$

come risulta dalle ultime equazioni (A) del paragrafo 3 e dalle relazioni (3) e (4′).

Sommando membro a membro le prime due e ricorrendo alla (5) si ottiene

$$(P+2S)\cdot x = (P+B)\cdot y$$

che, confrontata con la (9a), dà $S = 0$.

Nel caso considerato, dunque, non vi è alcuna massa addizionale sui piatti e l'unico difetto della bilancia consiste nella disuguaglianza dei bracci.

Se si pone $S = 0$ nelle equazioni, l'ultima diventa superflua, perché implicita nelle prime due, e rimangono tre equazioni che possono essere risolte dopo avere sostituito nella (8a) $L+K$ a P.

Da esse e dalla (5) si deduce facilmente che, essendo $x > y$, deve essere $P > L > K > B$.

Ponendo $\alpha = y/x$ (con $0 < \alpha < 1$) le equazioni diventano:

$$K = L\cdot\alpha \qquad (6a')$$

$$L = (K+B)\cdot\alpha \qquad (7a')$$

$$L+B = (L+K)\cdot\alpha \qquad (8a')$$

Sostituendo la (6a′) nella (7a′) si ottiene $L = L\cdot\alpha^2+B\cdot\alpha$, da cui

$$L = B\cdot\alpha/(1-\alpha^2) \qquad (10a)$$

Sostituendo la (6a′) nella (8a′) e utilizzando la (10a) si ottiene

$$B\cdot\alpha/(1-\alpha^2) + B =$$
$$= (B\cdot\alpha/(1-\alpha^2) + B\cdot\alpha^2/(1-\alpha^2))\cdot\alpha$$

e, dividendo per B, moltiplicando per $(1-\alpha^2)$, riordinando, si ha

$$\alpha^3 + 2\cdot\alpha^2 - \alpha - 1 = 0 \qquad (12a)$$

che è un'equazione di terzo grado nel rapporto tra le lunghezze dei bracci. Essa ammette tre soluzioni reali di cui una positiva e minore dell'unità. Ciò può essere verificato ricorrendo alle formule di Cardano o, più semplicemente, risolvendo l'equazione per via grafica dopo avere diviso entrambi i membri per α, operazione senz'altro lecita essendo $\alpha > 0$.

Si tratta di cercare le intersezioni delle due curve di equazione

$$\begin{cases} z = 1/\alpha \\ z = \alpha^2 + 2\cdot\alpha - 1 \end{cases}$$

come mostrato nella figura 1, linea a.

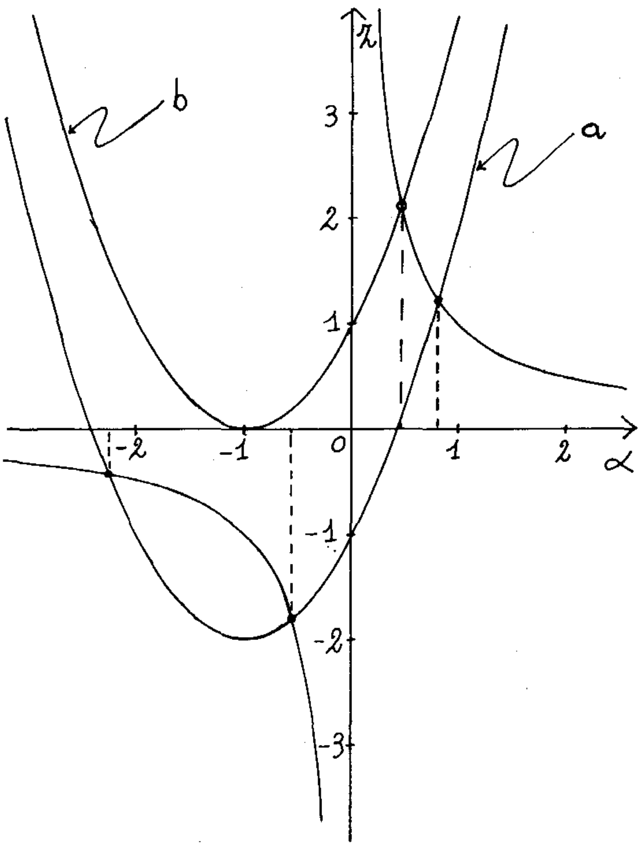


Fig. 1

Il valore della radice positiva si aggira intorno a 0,8 per cui risulterebbe $y \approx 0{,}8\,x$ e ciò indicherebbe che il braccio maggiore della bilancia è circa il 20% più lungo dell'altro.

B) Secondo e terzo caso (si ha una nuova soluzione e si riottiene la prima)

Le equazioni dei momenti, nel secondo caso, sono:

$$L\cdot x = (K+S)\cdot y \qquad (6b1)$$

$$(K+B)\cdot x = (L+S)\cdot y \qquad (7b1)$$

$$(L+B)\cdot x = (P+S)\cdot y \qquad (8b1)$$

$$P\cdot x = (P+B+S)\cdot y \qquad (9b1)$$

come risulta dalle prime equazioni (B) del paragrafo 3 e dalle relazioni (3) e (4').

Sottraendo membro a membro la (7b1) dalla (8b1), si ottiene

$$(L-K)\cdot x = (P-L)\cdot y = K\cdot y$$

che, sottratta a sua volta dalla (6b1), fornisce il risultato

$$K\cdot x = S\cdot y \qquad (10b1)$$

Sostituendo la (10b1) nelle quattro equazioni dei momenti e ponendo al solito $\alpha = y/x$ (con $0 < \alpha < 1$) si ha:

$$L = (1+\alpha)\cdot K \qquad (6b1')$$

$$B = L\cdot\alpha \qquad (7b1')$$

$$L+B = P\cdot\alpha + K \qquad (8b1')$$

$$P = P\cdot\alpha + B\cdot\alpha + K \qquad (9b1')$$

Sottraendo membro a membro la (8b1') dalla (9b1') e tenendo presente la (5) si ottiene la relazione

$$K = (1+\alpha)\cdot B \qquad (11b1)$$

che, sostituita nella (6b1'), dà $L = (1+\alpha)^2\cdot B$; inserendo quest'ultima nella (7b1') e riordinando si ha l'equazione di terzo grado

$$\alpha^3 + 2\cdot\alpha^2 + \alpha - 1 = 0 \qquad (12b1)$$

che può essere risolta per via grafica analogamente alla (12a).

Come nel caso precedente, si tratta di cercare le intersezioni tra le curve di equazione

$$\begin{cases} z = 1/\alpha \\ z = \alpha^2 + 2\cdot\alpha + 1 \end{cases}$$

La figura 1, linea b, mostra l'unica intersezione reale tra le curve, corrispondente all'unica radice reale e positiva dell'equazione. Il suo valore si aggira intorno a 0,5 per cui risulterebbe $y \approx 0{,}5\,x$ e ciò indicherebbe che il braccio maggiore della bilancia è circa il doppio dell'altro. Inoltre, la massa addizionale sul piatto destro della bilancia risulterebbe, in base alla (10b1), circa il doppio di K.

* * * * *

Nel terzo caso, le equazioni dei momenti sono

$$K\cdot x = (L+S)\cdot y \qquad (6b2)$$

$$L\cdot x = (K+B+S)\cdot y \qquad (7b2)$$

come risulta dalle ultime equazioni (B) del paragrafo 3, alle quali vanno aggiunte la (8b1) e la (9b1).

Sommando membro a membro la (6b2) con la (7b2), e tenendo presente la (5), si ottiene la relazione

$$P\cdot x = (P+B+2S)\cdot y$$

che, confrontata con la (9b1), dà $S = 0$.

Se si sostituisce questo risultato nelle equazioni (6b2), (7b2), (8b1) e si pone $\alpha = y/x$, si ritrovano le (6a'), (7a'), (8a') già discusse.

C) Quarto e quinto caso (da scartare)

Le equazioni dei momenti, nel quarto caso, sono:

$$(L+S)\cdot x = K\cdot y \qquad (6c1)$$

$$(K+B+S)\cdot x = L\cdot y \qquad (7c1)$$

come risulta dalle prime equazioni (A) del paragrafo 3, alle quali vanno aggiunte la (8a) e la (9a). Va tenuto presente che, essendo per ipotesi $x < y$, deve essere necessariamente $S > 0$, altrimenti non sarebbe possibile lo sbilanciamento a sinistra della bilancia.

Sommando membro a membro le prime due e ricorrendo alla (5) si ottiene

$$(L+K+B+2S)\cdot x = P\cdot y$$

che, confrontata con la (8a), dà $K+S = 0$, in contrasto con le condizioni $K > 0$ e $S > 0$.

* * * * *

Anche nel quinto caso si va incontro ad un assurdo. Infatti, le equazioni dei momenti sono identiche a quelle del primo caso, fatto salvo che la condizione sui bracci è $x < y$, e il confronto tra le prime due porta ancora al risultato $S = 0$, ora incompatibile con la condizione $S > 0$.

6. Calcolo accurato delle radici

Come si è visto, dei cinque casi discussi solo i primi due portano ad una soluzione del problema della bilancia.

Una ricerca accurata del valore di α può essere fatta mediante un procedimento iterativo di calcolo numerico da usare con un elaboratore.

Tenendo presente che si cerca una radice positiva, se si riscrive l'equazione (12a) nella forma seguente

$$\alpha^2 = (\alpha + 1 - \alpha^3)/2$$

si può adottare come formula di iterazione

$$\alpha_{N+1} = \sqrt{(\alpha_N + 1 - \alpha_N^3)/2} \qquad (13a)$$

La (13a), inserita in un programma molto semplice consente di ottenere valori approssimati di α fino a dieci cifre significative, o anche più. Nella tabella 1 sono riportati i dati ottenuti con un programma scritto in Turbo Pascal.

Tabella 1.

Il valore iniziale di α è: 0.8

α	β
0.8024961059	0.0024961059
0.8017757210	0.0007203849
0.8019846518	0.0002089307
0.8019241421	0.0000605097
0.8019416739	0.0000175318
0.8019365949	0.0000050790
0.8019380663	0.0000014714
0.8019376400	0.0000004263
0.8019377635	0.0000001235
0.8019377278	0.0000000358
0.8019377381	0.0000000104
0.8019377351	0.0000000030
0.8019377360	0.0000000009
0.8019377357	0.0000000003
0.8019377358	0.0000000001

Nota: δ rappresenta la differenza tra il valore di α precedente e quello a fianco.

Prendendo come valore della radice $\alpha = y/x = 0{,}80194$ si trova che $d = x - y \approx 0{,}198 \cdot x$, cioè la bilancia viene "aggiustata" riducendo il braccio più lungo del 19,8%.

Sostituendo il valore di α nella (10a) e utilizzando il risultato nella relazione (6a') e nella (5) si ottengono i seguenti valori di K, L, P, espressi in funzione di B

$$K \approx 1{,}802\ B$$
$$L \approx 2{,}247\ B$$
$$P \approx 4{,}049\ B$$

Nell'altro caso, invece, conviene scrivere l'equazione (12b1) nella forma

$$1/\alpha = (\alpha+1)^2$$

e adottare come formula di iterazione

$$\alpha_{N+1} = 1/(\alpha_N + 1)^2 \qquad (13b1)$$

Nella tabella 2 sono riportati i dati ottenuti con un programma in Turbo Pascal analogo al precedente.

Tabella 2.

Il valore iniziale di α è: 0.5

α	δ
0.4444444444	0.0555555556
0.4792899408	0.0348454964
0.4569760000	0.0223139408
0.4710805833	0.0141045833
0.4620905355	0.0089900478
0.4677905760	0.0057000405
0.4641643805	0.0036261956
0.4664663557	0.0023019753
0.4650030406	0.0014633152
0.4659324391	0.0009293985
0.4653418257	0.0005906134
0.4657170180	0.0003751923
0.4654786213	0.0002383967
0.4656300771	0.0001514558
0.4655338472	0.0000962299
0.4655949850	0.0000611378
0.4655561409	0.0000388441
0.4655808200	0.0000246792
0.4655651402	0.0000156799
0.4655751022	0.0000099621
0.4655687729	0.0000063294
0.4655727942	0.0000040213
0.4655702393	0.0000025549
0.4655718625	0.0000016233
0.4655708312	0.0000010313
0.4655714864	0.0000006552
0.4655710701	0.0000004163
0.4655713346	0.0000002645
0.4655711666	0.0000001680
0.4655712734	0.0000001068
0.4655712055	0.0000000678
0.4655712486	0.0000000431
0.4655712212	0.0000000274
0.4655712386	0.0000000174
0.4655712276	0.0000000111
0.4655712346	0.0000000070
0.4655712301	0.0000000045
0.4655712330	0.0000000028
0.4655712312	0.0000000018
0.4655712323	0.0000000011
0.4655712316	0.0000000007
0.4655712321	0.0000000005
0.4655712318	0.0000000003
0.4655712319	0.0000000002
0.4655712318	0.0000000001
0.4655712319	0.0000000001

Nota: δ rappresenta la differenza tra il valore di α precedente e quello a fianco.

Prendendo come valore della radice $\alpha = y/x = 0,46557$ si trova che $d = x - y \approx 0,534 \cdot x$, ma la bilancia non può essere "aggiustata" semplicemente riducendo il braccio più lungo del 53,4%, perché sul piattello di destra è presente una massa addizionale.

Sostituendo il valore di α nella (11b1) e utilizzando il risultato delle relazioni (6b1′), (10b1) e (5) si ottengono i seguenti valori di K, L, S, P, espressi in funzione di B

$$K \approx 1,466\ B$$

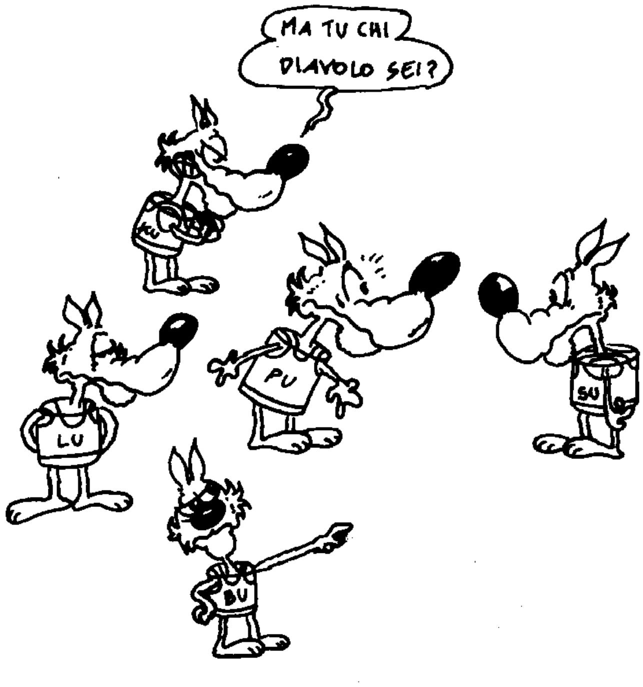
$$L \approx 2,149\ B$$

$$S \approx 3,149\ B$$

$$P \approx 3,615\ B$$

Oltre ad accorciare il braccio più lungo, per "aggiustare" la bilancia bisogna togliere dal piattello di destra, o aggiungere su quello di sinistra, una massa S di poco inferiore a quella dell'oggetto più grande Pu.

I valori delle masse K, L, P risultano diversi da quelli trovati precedentemente a conferma dell'assoluta incompatibilità tra le due soluzioni trovate.



Ringraziamenti

Desideriamo ringraziare il Prof. Riccardo Freddi, Preside dell'Istituto Tecnico Industriale di Mantova, per averci sottoposto il problema e lo studente Paolo Melara, dello stesso Istituto, per averlo interpretato in chiave umoristica con tre vignette.