LEDO STEFANINI

Liceo Scientifico «Belfiore», Mantova

DIDATTICA

Grafici, integrali e derivate nell'insegnamento della fisica

Introduzione

In fisica si fa largo uso di grafici, come del resto in tutte le scienze, per rappresentare risultati sperimentali o relazioni fra grandezze. Di più, in didattica, si usa la rappresentazione grafica anche come mezzo per attingere risultati che ,diversamente, richiederebbero strumenti matematici di cui gli studenti non sono (ancora) in possesso.

In pratica, nei testi di fisica elementare, il concetto di derivata viene tradotto in quello di pendenza della curva che rappresenta la funzione, e quello di integrale in quello di area della regione del grafico limitata dalla curva e dall'asse della variabile indipendente in un certo intervallo.

Fra i molti esempi possibili, basti ricordare come, nei testi di fisica per la scuola media, si ricava l'equazione oraria del moto uniformemente accelerato.

Su di una coppia di assi cartesiani ortogonali, si riportano, rispettivamente, la velocità ed il tempo. Si rappresenta dapprima un moto uniforme: il grafico è una retta orizzontale e lo spazio è rappresentato dall'«area» del «rettangolo» delimitato dalla retta del grafico, dall'asse dei tempi e dalle verticali condotte per i punti dell'istante iniziale e del finale (Fig. 1). Quindi si passa a rappresentare un moto uniformemente accelerato; in questo caso, lo spazio percorso è rappresentato dall'«area» del trapezio rettangolo formato dalla retta del grafico e dall'asse dei tempi fra i due istanti estremi (Fig. 2). Risulta allora evidente che

$$s = v_o t + \frac{1}{2} a t^2$$

In realtà, argomentazioni di questo genere, anche se sostanzialmente corrette, possono presentare grossi pericoli dal punto di vista didattico, qualora non vengano usate con la necessaria consapevolezza ed accompagnate da alcune puntualizzazioni.

In questa nota, esporremo alcune considerazioni a proposito dell'utilizzazione delle rappresentazioni grafiche per finalità del tipo di quella indicata. A questo scopo, richiameremo alcune nozioni elementari sulle trasformazioni affini nel piano e, con alcuni esempi, mostreremo che è possibile utilizzare queste nozioni per determinare derivate ed integrali di alcune delle funzioni che si presentano nei corsi di fisica di livello liceale.

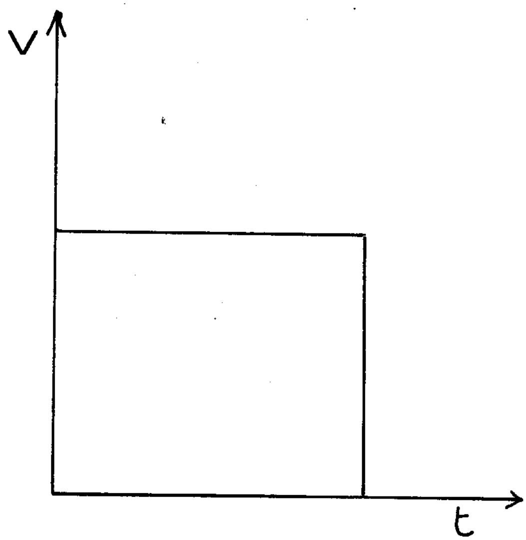

Fig. 1

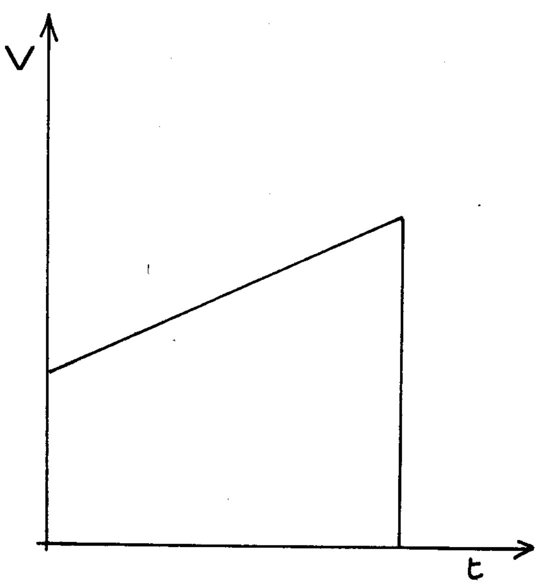

Fig. 2

1. Grafici cartesiani

Il piano nel quale vengono di solito rappresentate graficamente le relazioni fra variabili fisiche (velocità-tempi, tensioni-correnti, ecc.) non è il piano metrico della geometria elementare.

Infatti, le unità di misura assunte sui due assi si riferiscono a grandezze fisiche diverse e, di conseguenza, sono fra loro non confrontabili. Ne consegue che ,in questo piano, sono prive di significato quelle grandezze geometriche che non si conservano quando si mutano le unità di misura assunte sugli assi.

In particolare, hanno significato solo le distanze fra punti appartenenti a rette parallele a uno degli assi cartesiani. Infatti il rapporto fra un segmento i cui estremi hanno la stessa ascissa (o la stessa ordinata) ed il segmento che rappresenta l'unità di misura corrispondente non varia al variare dell'unità di misura. Risulta invece priva di significato la distanza di punti che non abbiano la stessa ascissa o la stessa ordinata, come B e C in Fig. 3. Si noti che, in tale riferimento, non

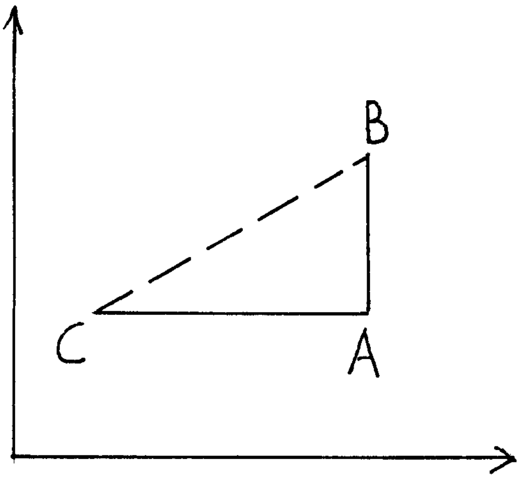

Fig. 3

sussiste la relazione pitagorica, in quanto la nozione di angolo — e di perpendicolarità — è destituita di significato. L'ortogonalità degli assi risponde unicamente ad esigenze di opportunità grafica.

Si mantiene, invece, il concetto di parallelismo e, quindi, di direzione e di pendenza, e quello di area di una superficie; a condizione, però, di puntualizzarne le definizioni.

Volendo formalizzare queste considerazioni, possiamo asserire che ,nel piano cartesiano in cui si rappresentano graficamente le grandezze fisiche, non si possono considerare se non funzioni delle variabili (le indicheremo, more solito, con x ed y) che sono invarianti per trasformazioni del tipo

$$\begin{aligned} x' &= ax + dy + p \\ y' &= cx + by + q \end{aligned} \qquad (1)$$

Esse prendono il nome di «affinità». Le (1) descrivono una corrispondenza fra due piani cartesiani che «deforma» le figure sia mutando in misura diversa le unità sugli assi, che variando l'angolo da essi formato. Se manteniamo gli stessi assi cartesiani, le (1) assumono la forma (più espressiva):

$$\begin{aligned} x' &= a\,x \\ y' &= b\,y \end{aligned} \qquad (1')$$

Seguendo Campedelli [1], ci riferiremo al piano delle rappresentazioni grafiche come al «piano affine».

2. Area nel piano affine

In Fig. 4 riportiamo le rappresentazioni grafiche di una stessa funzione, in due riferimenti cartesiani diversi, S ed S'. I punti dei due grafici si corrispondono in un'affinità del

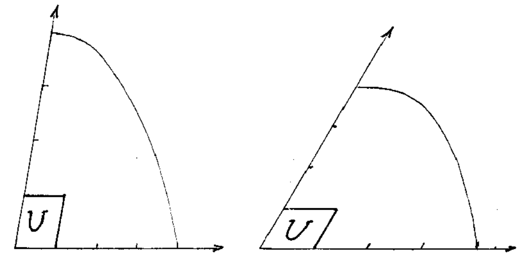

Fig. 4

tipo (1). Si consideri nel piano una regione limitata dalla curva e dall'asse delle ascisse fra due certi valori. Se si vuole definirne l'area, essa andrà confrontata con l'unità di superficie, cioè con il parallelogrammo che ha i lati paralleli agli assi e di lunghezza unitaria. Il rapporto fra la superficie della regione e quella del parallelogrammo assunto come unitario è invariante per l'affinità che porta S in S' [2], [3].

A questo rapporto diamo il nome di «area affine». Esso coincide, almeno nella sua accezione più elementare, con il concetto di integrale della funzione che viene rappresentata graficamente [3], [4]. Anzi, la sua introduzione consente di ridurre il calcolo di molti integrali della fisica elementare al confronto ed alla somma di superfici affini, e quindi di evitare il formalismo proprio del calcolo integrale.

Ciò è tanto più utile in fisica in quanto spesso non si è tanto interessati al valore dell'integrale, quanto piuttosto alla dipendenza funzionale fra l'integrale stesso ed uno degli estremi di integrazione; cioè all'integrale indefinito.

Alcuni esempi

1) *Area del parallelogramma.*

Nel grafico di Fig. 5 è rappresentata una funzione che ha valore costante k fra i valori O ed h della variabile. Sul grafico sono segnate anche le unità di misura per le due grandezze x ed y.

L'area affine del parallelogrammo è il rapporto fra la superficie del parallelogrammo OACB e quella del parallelogrammo unitario U. Essa, manifestamente, è espressa da h X k, prodotto delle misure dei lati; non da base per altezza, come sarebbe nel piano metrico. Di questo risultato faremo uso negli esempi successivi.

2) *Aree di figure affini rispetto ad una stessa unità.*

Consideriamo un parallelogrammo come quello di Fig. 5 ed operiamo, per semplicità, la trasformazione (1'). Otterremo un nuovo parallelogrammo che, rispetto alle vecchie

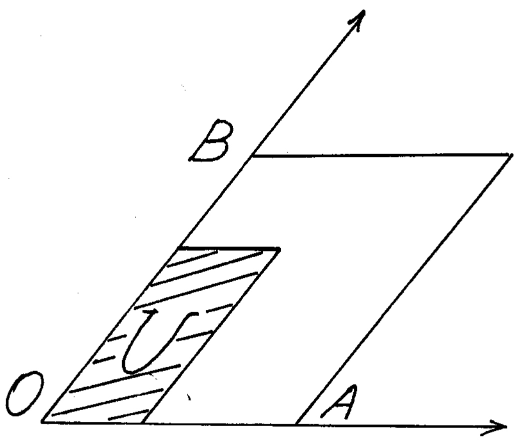

Fig. 5

unità, ha i lati lunghi rispettivamente *ah* e *bk* e che ha, quindi, area affine *abhk* rispetto al primitivo parallelogrammo unitario. Generalizzando il risultato, possiamo concludere che se due regioni piane si corrispondono in una affinità di equazioni (1), le loro aree affini, riferite allo stesso parallelogrammo unitario, stanno nel rapporto *ab*.

Per una dimostrazione più rigorosa, si veda Rif. [2], pag. 145. Anche di questo risultato si farà uso negli esempi seguenti.

3) Si voglia calcolare l'area affine della regione limitata dalla curva che rappresenta la funzione $1/x^2$ e dall'asse delle ascisse fra i valori 1 e 2^n, con n intero positivo (Fig. 6). A tale scopo, indichiamo con a l'area affine

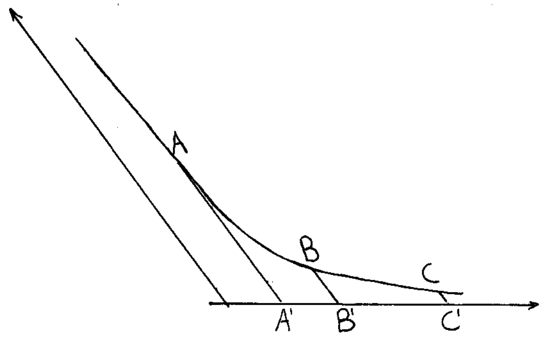

Fig. 6

del trapezoide ABB'A' che ha per base l'intervallo (1, 2).

L'affinità di equazioni

$$x' = 2\,x$$
$$y' = y/4$$

stabilisce una corrispondenza biunivoca che ad ogni punto del trapezoide ABB'A' associa un punto del trapezoide BCC'B'. In particolare, ad ogni punto dell'arco AB, di coordinate $(x, 1/x^2)$ corrisponde un punto dell'arco BC di coordinate $(2x, 1/4x^2)$. L'area affine di BCC'B' è quindi $\dfrac{1}{2}\,a$.

Analoghe considerazioni si possono fare per il trapezoide CDD'C' la cui area risulta $\dfrac{1}{4}\,a$; e così via.

L'area della regione compresa fra le ascisse 1 e 2^n sarà

$$A\,(1, 2^n) = a\,(1 + \frac{1}{2} + \ldots. + \frac{1}{2^{n-1}}) =$$

$$= 2\,a\,(1 - \frac{1}{2^n}) \tag{2}$$

In particolare

$$A\,(1, \infty) = 2\,a \tag{3}$$

Poiché la scelta del passo, cioè della suddivisione della superficie, è del tutto arbitraria, la (2) è generalizzabile nella

$$A\,(1, x) = K\,(1 - \frac{1}{x}) \tag{2'}$$

dove $K = A\,(1, \infty)$, e si è posto $x = 2^n$. Il valore di K si può facilmente calcolare. Infatti, si consideri il trapezoide di base $(1, 1 + \varepsilon)$, con $\varepsilon < 1$ (Fig. 7). Esso può essere assimilato ad un parallelogrammo di dimensioni ε ed 1, con tanta maggiore approssima-

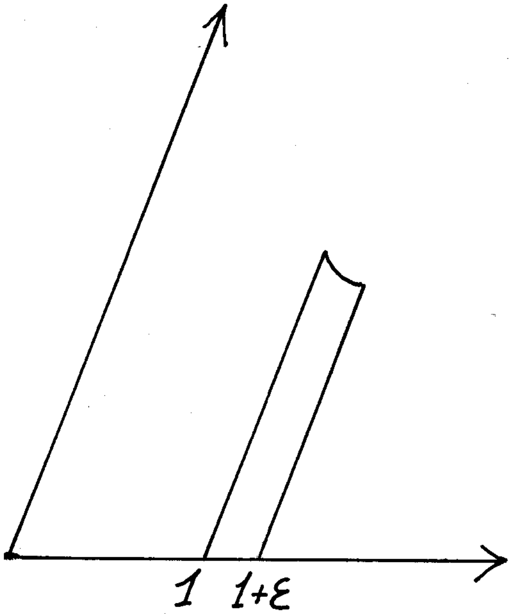

Fig. 7

zione, quanto più ε è piccola rispetto all'unità. Allora

$$A\,(1,\ 1+\varepsilon) = K\left(1 - \frac{1}{1+\varepsilon}\right) \cong 1 \cdot \varepsilon = \varepsilon$$

da cui viene che $K \cong 1$.

I risultati ottenuti sono particolarmente interessanti per l'insegnamento della fisica elementare. La funzione studiata può infatti rappresentare il campo gravitazionale o l'elettrostatico generati da una massa o una carica puntiformi.

Il risultato ottenuto può essere espresso anche con il simbolo

$$\int_1^x \frac{1}{x^2}\,dx = 1 - \frac{1}{x}$$

e consente di calcolare, in modo non artificioso, potenziali ed energie di legame.

Questa tecnica di calcolo può facilmente estendersi a funzioni del tipo $1/x^n$, con n intero > 2. L'affinità da considerare sarà

$$x' = nx$$
$$y' = y/n^n$$

4) Si voglia calcolare

$$\int_1^x \frac{1}{x}\,dx.$$

Si considerino (Fig. 8) i trapezoidi ABB'A' e BCC'B'. Essi si corrispondono nell'affinità di equazioni

$$x' = 2x$$
$$y' = y/2$$

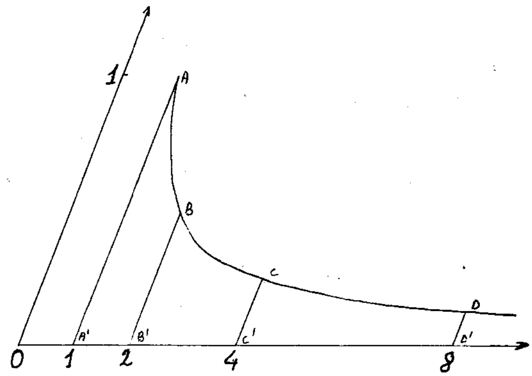

Fig. 8

ed hanno quindi aree affini eguali. Lo stesso vale per il trapezoide CDD'C' nei confronti di BCC'B' e così via.

L'area della regione compresa fra la curva e l'asse delle x, fra le ascisse 1 e 2^n (con n intero), sarà

$$A\,(1,\ 2^n) = n\,a$$

avendo indicato con a l'area di ciascuno dei trapezoidi.

Se si pone $2^n = x$, la formula si generalizza nella

$$A\,(1,\ x) = a \log_2 x \qquad (3)$$

o, poiché la base è arbitraria,

$$A\,(1,\ x)\ a \log x \qquad (3')$$

dove il fattore di proporzionalità dipende dalla base scelta per il logaritmo. Esso può essere determinato con approssimazione arbitraria con una tecnica analoga a quella seguita nel caso precedente.

Se si assimila il trapezoide di base $(1,\ 1+\varepsilon)$ ad un parallelogrammo, dalla (3') si ha che

$$A\,(1, 1+\varepsilon) = \frac{1}{K} \log\,(1+\varepsilon) \cong 1\ \varepsilon = \varepsilon$$

avendo indicato con $1/K$ il fattore di proporzionalità. Da qui si ottiene

$$K \cong \frac{1}{\varepsilon} \log\,(1+\varepsilon) = \log\,(1+\varepsilon)^{1/\varepsilon} \qquad (4)$$

che ci fornisce il valore di K con tanta maggiore approssimazione quanto più ε è piccola.

Incidentalmente, si può anche porre il problema di determinare la base dei logaritmi in modo tale che il fattore di proporzionalità nella (3') sia l'unità. Dalla (7) si ricava immediatamente che tale base dovrà essere

$$\cong (1+\varepsilon)^{1/\varepsilon} \qquad (5)$$

che consente di introdurre in modo naturale e di calcolare, con arbitraria approssimazione, il numero di Neper.

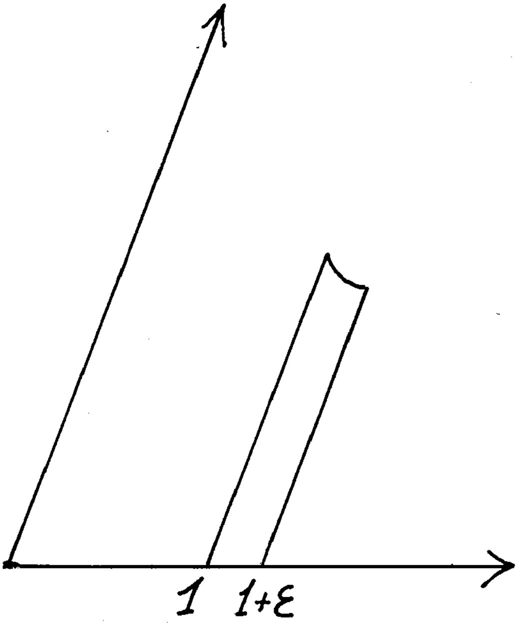

Fig. 7

zione, quanto più ε è piccola rispetto all'unità. Allora

$$A\,(1,\,1+\varepsilon) = K\,(1 - \frac{1}{1+\varepsilon}) \cong 1 \cdot \varepsilon = \varepsilon$$

da cui viene che $K \cong 1$.

I risultati ottenuti sono particolarmente interessanti per l'insegnamento della fisica elementare. La funzione studiata può infatti rappresentare il campo gravitazionale o l'elettrostatico generati da una massa o una carica puntiformi.

Il risultato ottenuto può essere espresso anche con il simbolo

$$\int_1^x \frac{1}{x^2}\,dx = 1 - \frac{1}{x}$$

e consente di calcolare, in modo non artificioso, potenziali ed energie di legame.

Questa tecnica di calcolo può facilmente estendersi a funzioni del tipo $1/x^n$, con n intero > 2. L'affinità da considerare sarà

$$x' = nx$$
$$y' = y/n^n$$

4) Si voglia calcolare

$$\int_1^x \frac{1}{x}\,dx.$$

Si considerino (Fig. 8) i trapezoidi ABB'A' e BCC'B'. Essi si corrispondono nell'affinità di equazioni

$$x' = 2x$$
$$y' = y/2$$

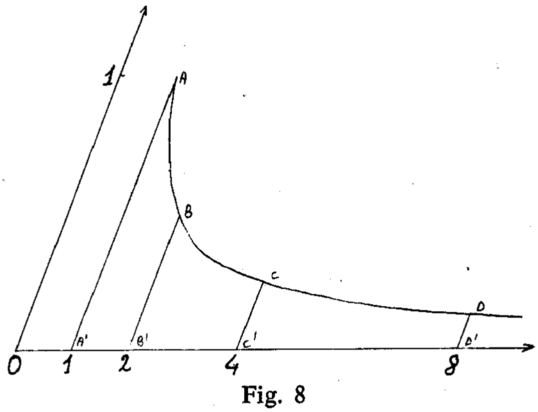

Fig. 8

ed hanno quindi aree affini eguali. Lo stesso vale per il trapezoide CDD'C' nei confronti di BCC'B' e così via.

L'area della regione compresa fra la curva e l'asse delle x, fra le ascisse 1 e 2^n (con n intero), sarà

$$A\,(1,\,2^n) = n\,a$$

avendo indicato con a l'area di ciascuno dei trapezoidi.

Se si pone $2^n = x$, la formula si generalizza nella

$$A\,(1,\,x) = a \log_2 x \qquad (3)$$

o, poiché la base è arbitraria,

$$A\,(1,\,x)\ a \log x \qquad (3')$$

dove il fattore di proporzionalità dipende dalla base scelta per il logaritmo. Esso può essere determinato con approssimazione arbitraria con una tecnica analoga a quella seguita nel caso precedente.

Se si assimila il trapezoide di base $(1,\,1+\varepsilon)$ ad un parallelogrammo, dalla (3') si ha che

$$A\,(1, 1+\varepsilon) = \frac{1}{K} \log\,(1+\varepsilon) \cong 1\,\varepsilon = \varepsilon$$

avendo indicato con $1/K$ il fattore di proporzionalità. Da qui si ottiene

$$K \cong \frac{1}{\varepsilon} \log\,(1+\varepsilon) = \log\,(1+\varepsilon)^{1/\varepsilon} \qquad (4)$$

che ci fornisce il valore di K con tanta maggiore approssimazione quanto più ε è piccola.

Incidentalmente, si può anche porre il problema di determinare la base dei logaritmi in modo tale che il fattore di proporzionalità nella (3') sia l'unità. Dalla (7) si ricava immediatamente che tale base dovrà essere

$$\cong (1+\varepsilon)^{1/\varepsilon} \qquad (5)$$

che consente di introdurre in modo naturale e di calcolare, con arbitraria approssimazione, il numero di Neper.

5) Si voglia calcolare $\int_{o}^{K} x^n\, dx$ con n e k positivi.

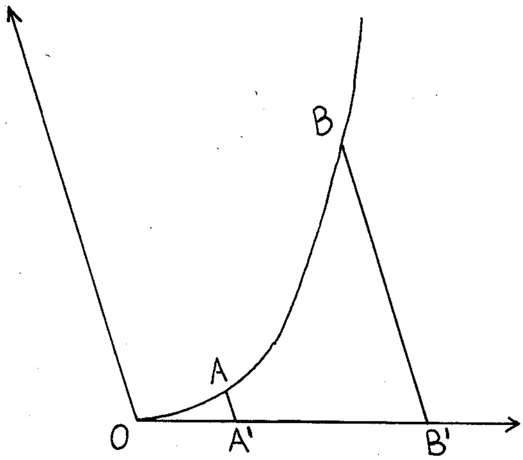

Fig. 9

Allo scopo, basterà confrontare i triangoloidi (Fig. 9) OAA' e OBB' che insistono rispettivamente sul segmento unitario e sul segmento di lunghezza k. Essi si corrispondono nell'affinità di equazioni

$$x' = k\,x$$
$$y' = k^n\,y$$

Ne viene che, se a indica l'area del triangoloide di base unitaria,

$$A\,(o,\,k) = a\,k^{n+1} \qquad (6)$$

6) Si voglia $\int_{1}^{X} a^X\, dx$, con a positivo e diverso da 1.

Ad ogni punto x dell'intervallo (0, 1) facciamo corrispondere i punti x + 1, x + 2, . . ., x + n-1 (con n intero) che appartengono rispettivamente agli intervalli (1, 2), (2, 3), . . . (n-1, n) dell'asse delle ascisse. Si determina così una mappa che ad ogni punto dell'arco AB della curva (Fig. 10) di ordinata a^X associa n-1 punti degli archi BC, CD, ecc. di ordinate rispettivamente

$$a^{x+1} = a\ a^x$$
$$a^{x+2} = a^2\,a^x$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$a^{x+n-1} = a^{n-1}\,a^x$$

Ne segue che l' i-esimo trapezoide corrisponde al primo nell'affinità di equazioni

$$x' = x + i\text{-}1 \qquad (7)$$
$$y' = a^{i-1}\,y$$

e quindi che l'area dell' i-esimo trapezoide è a^{i-1} volte l'area del primo ABB'O.

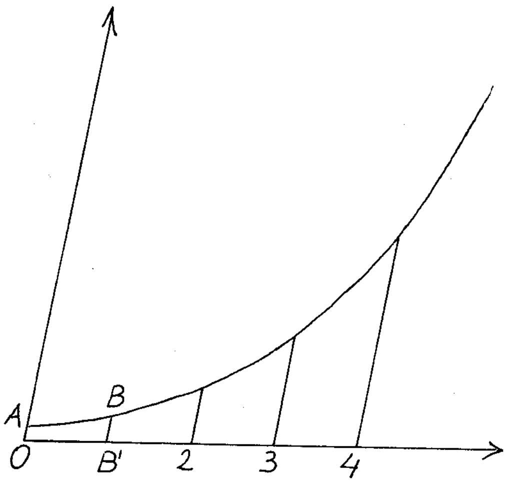

Fig. 10

Si noti che la trasformazione (7) non è, propriamente, del tipo (1'), ma piuttosto del tipo

$$x' = ax + p$$
$$y' = b\,y$$

che equivale a far seguire ad una affinità (1') una traslazione. Ovviamente, anche in questo caso il rapporto delle aree è *ab*.

Perciò, tornando al problema,

$$A\,(1,\,n) = a\,(1 + a + \ldots + a^{n-1})$$

Si tratta della somma di termini di una progressione geometrica di ragione a, quindi

$$A\,(1,\,n) = \frac{a}{a-1}\,(a^n - 1)$$

che, generalizzata, diviene

$$A\,(1,\,x) = \frac{a}{a-1}\,(a^x - 1) \qquad (8)$$

Per il calcolo di a si può dividere l'intervallo (0, 1) in n intervalli di ampiezza 1/n ed applicare ai trapezoidi ottenuti argomentazioni analoghe a quelle fin qui seguite. Ne viene che a è $\dfrac{a-1}{a^{1/n}-1}$ volte l'area del trapezoide di base (0, 1/n).

Se assimiliamo quest'ultimo ad un parallelogrammo di dimensioni 1 ed 1/n, si ha

$$a \cong \frac{a-1}{a^{1/n}-1}\,\frac{1}{n} \qquad (9)$$

con un errore tanto minore quanto più grande è n.

Ci si può anche chiedere per quale valore di a il fattore che compare nella (8) abbia valore unitario. Dalla (9) discende che ciò si verifica per

$$a \cong \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

che è identica alla (5).

3. Affinità e derivate

Il valore del rapporto $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ relativo a due punti P_1 e P_2 del piano affine è indipendente dalle scale grafiche assunte. Lo chiameremo « pendenza » della retta $P_1 P_2$ anche se non è definibile come tangente goniometrica dell'angolo che la retta determina con l'asse delle ascisse, com'è lecito, invece, nel piano metrico.

A partire da qui, è possibile, attraverso le consuete argomentazioni, definire la pendenza affine di una curva in un suo punto: il che coincide con il concetto di derivata della funzione. Ora, fissate le scale grafiche e gli assi, si consideri la trasformazione affine di equazioni:

$$x' = a\,x \qquad y' = b\,y$$

Com'è noto, essa conserva il parallelismo, e, com'è facile verificare, trasforma una retta di pendenza m in una retta di pendenza $m\,b/a$.

Questa osservazione consente di determinare, senza l'ausilio del calcolo infinitesimale, l'andamento della derivata della maggior parte delle funzioni elementari.

Come nella parte precedente, proponiamo alcuni esempi.

1) Si vuole la derivata di x^n, con n qualsivoglia. All'uopo si consideri l'affinità di equazioni

$$x' = k\,x \qquad y' = k^n y \quad \text{con } k > 0 \tag{10}$$

Essa associa al punto della curva di ascissa 1, il punto della stessa curva di ascissa k. Se m(1) indica la pendenza della curva nel punto di ascissa 1, la pendenza nel punto di ascissa k, immagine del primo nell'affinità (10), è, per quanto si è detto,

$$m(k) = \frac{k^n}{k}\, m(1)$$

come dire

$$m(x) \propto x^{n-1} \tag{11}$$

che fornisce l'andamento della derivata di x^n.

2) La funzione sia a^x con $a \neq 0$ e $a \neq 1$.

L'affinità di equazioni

$$x' = x + k \qquad y' = a^K y \tag{12}$$

con $k > 0$, associa al punto della curva di ascissa 0 il punto della stessa curva di ascissa k. La pendenza in questo punto sarà perciò

$$m(k) = a^K\, m(0)$$

che equivale a dire che

$$m(x) \propto a^x \tag{13}$$

A proposito della trasformazione (12), si può ripetere quanto si è detto per la (7): si tratta di una affinità del tipo (1') composta con una traslazione parallela all'asse x, di ampiezza k. Anche in questo caso, la nuova pendenza è uguale alla vecchia moltiplicata per il rapporto dei coefficienti b/a.

3) Si vuole derivare la funzione log x, in base qualsivoglia. L'affinità da considerare è quella di equazioni

$$x' = k\,x \qquad y' = y + \log k, \quad \text{con } k > 0,$$

che trasforma il punto (1, 0) nel punto (k, log k) della stessa curva logaritmica. Qui la pendenza vale

$$m(k) = \frac{1}{k}\, m(0)$$

che è come dire che la derivata di log x è proporzionale a $1/x$.

Conclusioni

I concetti di derivata e di integrale, quali vengono proposti nell'insegnamento liceale, si possono ricondurre a quelli di pendenza di una curva ed area di una superficie; ma a condizione che queste vengano intese in senso affine. Questa necessità non viene mai convenientemente chiarita nei libri di testo.

Il metodo delle affinità per la determinazione di derivate ed integrali, consiste, sostanzialmente, nell'individuazione di una affinità che trasformi i punti della curva appartenenti ad un certo intervallo, nei punti della stessa curva appartenenti ad un altro intervallo. Possiamo dire che, se f(x) è la funzione, si ricerca una trasformazione del tipo

$$x' = ax + p \qquad y' = by + q \tag{14}$$

tale che, se (x', y') appartiene alla curva, anche (x, y) le appartenga, cioè che

$$b\,f(x) + q = f(ax + p) \tag{15}$$

per tutte le x di un certo intervallo.

Naturalmente, p e q possono anche essere nulli.

E' facile verificare che se la f(x) è una funzione goniometrica, l'identità (15) non può essere verificata.

BIBLIOGRAFIA

[1] L. Campedelli, La geometria dei parallelogrammi, Firenze, 1972.

[2] M. Villa, Per un insegnamento moderno della matematica, Bologna, 1963, Cap. VII.

[3] L. Campedelli, Le trasformazioni elementari dal punto di vista della geometria sintetica, Cap. VII, in Matematica Moderna, a cura di M. Villa, Bologna, 1965.

[4] A. I. Markushevich, Aree e logaritmi, Milano, 1964.

[5] V. G. Shervatov, Funzioni iperboliche, Milano, 1964.

QUOTE ASSOCIATIVE 1980

— Quota associativa A.I.F., per soci ordinari individuali e collettivi Lire 8.000

— Quota associativa A.I.F., per soci sostenitori individuali e collettivi Lire 24.000

ABBONAMENTI RIVISTE 1980

1. GIORNALE DI FISICA, quota ridotta per i soci A.I.F. Lire 8.000
2. FISICA E TECNOLOGIA, quota ridotta per i soci A.I.F. Lire 9.000
3. GIORNALE DI ASTRONOMIA, quota ancora da definire
4. PHYSICS EDUCATION, quota ridotta per i soci A.I.F. Lire sterl. 12,50

Gli abbonamenti a prezzo ridotto alle tre riviste italiane verranno inoltrati tramite l'A.I.F. solo se le quote perverranno entro il 31 marzo 1980.

Dopo tale data, gli interessati non potranno fruire della riduzione e dovranno pertanto rivolgersi direttamente alle riviste.

Gli abbonamenti alla rivista inglese PHYSICS EDUCATION possono essere richiesti inviando all'A.I.F. un assegno bancario di 12,50 sterline intestato a: **Circulation Manager of The Institute of Physics, Bristol.**

Per ragioni di carattere amministrativo le quote possono essere inviate fino al 31 Dicembre 1979.