L. STEFANINI

Liceo Scientif. Statale «Belfiore»
Mantova

DIDATTICA

Considerazioni didattiche sull'interpretazione dei risultati sperimentali

«Neppure in un laboratorio le cose si mostrano così come dovrebbero essere. Si scostano dalla regola in tutte le direzioni, ed è in fondo un'ipocrisia la nostra di attribuire questo fatto ad un errore di esecuzione e riconoscere all'esperimento un valore medio reale».

(R. MUSIL, «L'uomo senza qualità», 1952)

Premessa

L'insegnamento della Fisica di livello liceale dovrebbe perseguire, come non secondario fra altri, lo scopo di fornire al giovane una cognizione quanto più corretta possibile del significato, della portata e delle limitazioni delle proposizioni scientifiche.

Ciò richiede che si faccia spazio, nella scuola secondaria, alla attività sperimentale, ma, soprattutto, ad una maggiore consapevolezza del ruolo che l'osservazione e la misura giocano nel processo di crescita della conoscenza scientifica.

E non è da credere che nell'insegnamento puramente «libresco» della Fisica l'esperimento non svolga una funzione rilevante; ogni asserto fondamentale viene di solito corroborato con la descrizione di un esperimento il cui risultato dovrebbe consistere, appunto, nella legge o nel principio che si vuole insegnare. Quest'ultimo assume quindi un carattere carismatico essendo, per così dire, garantito dalla testimonianza diretta della natura.

Sugli assunti epistemologici e pedagogici che questa perversa linea didattica presuppone e sulle conseguenze che comporta nel processo di formazione di una coscienza scientifica, si sono avuti interventi autorevoli (1); ma non è stato messo sufficientemente in luce che dai pericoli di un «dogmatismo pseudo sperimentale» non vanno esenti neppure i corsi che si affidano quasi esclusivamente alla sperimentazione diretta.

La sperimentale è attività che contribuisce alla crescita culturale a misura che lo studente partecipa all'individuazione delle ipotesi, alla progettazione e alla critica dei risultati, oltre che alla realizzazione vera e propria. Che si ingeneri nel discente una sorta di consumismo dell'esperimento preconfezionato non è pericolo che si possa ignorare proprio perché, a ben guardare, le sue radici si confondono con quelle della didattica «libresca» di cui si è detto poc'anzi.

Un corso di Fisica per il triennio di liceo non ha bisogno di molti esperimenti, ma di esperimenti che sollecitino un reale impegno di meditazione critica e sul rapporto fra teoria ed esperienza e sull'interpretazione dei risultati sperimentali.

Il presente lavoro vuole portare un contributo di riflessione su alcuni problemi che emergono nell'attività sperimentale didattica e, nel contempo, proporre una linea di trattazione, a livello liceale, di alcune questioni concernenti l'incertezza delle misure e la interpolazione lineare dei dati sperimentali. Esso ha l'ambizione di porsi come complementare alle lucide «Note» di Ettore Orlandini (2) a cui debbo il sorgere dei miei interessi per questi problemi.

PARTE I - Valore più attendibile e medie

Nei manuali di Fisica di livello liceale, — ma non solo in questi — a proposito della misura si usa dire che «si assume come risultato più attendibile — o probabile, o plausibile — la media dei risultati ottenuti». Con ciò si dà per scontato che

- questa locuzione (attendibilità) abbia un significato univoco,
- esista sempre un « solo » risultato più attendibile,

(1) Si veda ad es. S. D'Agostino, *«Paradigmi storici e insegnamento scientifico»*, La Fisica nella Scuola, N. 3/4, 1976.

(2) E. Orlandini, *«Note sulle approssimazioni nelle misure»*, La Fisica nella Scuola, N. 2, 1969.

— quest'ultimo sia rappresentabile con una «media»,

— questa media sia aritmetica.

Vedremo come il campo di validità delle ipotesi esplicitate nei punti precedenti sia strettamente connesso al quadro dei rapporti fra teoria, finalità della misura, grandezza, strumento.

Rapporto teoria - finalità della misura

Problema N. 1 — Un costruttore deve applicare i vetri ai telai (metallici) delle finestre (tutte «eguali») di un edificio. Le larghezze dei telai si distribuiscono secondo l'istogramma di Fig. 1.

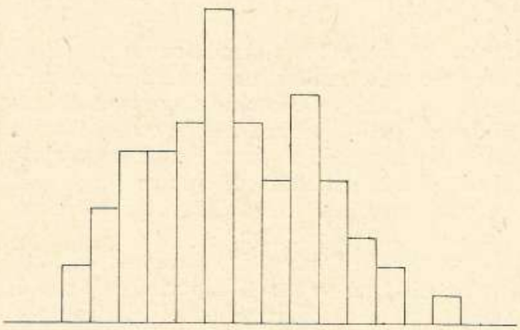

Fig. 1.

Quali valori assumere per le dimensioni dei telai in modo che sia minimo il tempo, e quindi il costo, richiesto dal taglio e dalla posa in opera delle lastre? Qualora si vogliano applicare delle tende che coprano interamente le finestre, quali valori assumere per le dimensioni dei telai?

Problema N. 2. — Lo stesso costruttore è disposto a spendere di più per un lavoro di carattere più «preciso». Ripete le misure con grande precisione — diciamo al mm — e per ogni telaio ordina la lastra corrispondente che viene tagliata con precisione analoga.

Ammesso che le misure siano state prese in estate, esse rappresentano un complesso di informazioni utili per l'operatore che, d'inverno, deve provvedere alla collocazione delle lastre?

I problemi proposti vogliono suggerire le considerazioni seguenti:

I parametri di una misura — come la precisione e il valore «più attendibile» — acquistano il loro significato solo in relazione allo scopo a cui, volta per volta, la misura è finalizzata. Non sempre il perseguimento di un numero elevato di cifre significative nella misura di una grandezza è, di per sé, significativo.

Ad esempio si pensi di voler misurare la velocità del suono nell'aria e che i parametri che descrivono la situazione fisica — temperatura, pressione, umidità, ecc. — siano noti entro l'1%.

Quale significato avrebbe ottenere per la velocità del suono una incertezza dell'ordine di 1 su 10^6 — paragonabile a quella con cui è nota c — ?.

Esiste inoltre uno stretto rapporto fra la teoria e la misura nel senso che la teoria — o il modello — precede sempre la misura e ne predetermina il significato, la precisione richiedibile, la tecnica.

Anche in un esperimento didattico è bene mettere in evidenza le ipotesi generali, le ipotesi di lavoro, il complesso di conoscenze e gli scopi che stanno alla base di una misura e ne determinano la precisione.

Il lavoro di indagine critica sull'esperimento non è meno importante dell'esecuzione vera e propria.

Rapporto teoria - grandezza - misura

Il nodo centrale è la determinazione della grandezza che si vuole misurare, cioé l'individuazione dei parametri fisici la cui variazione può indurre variazioni sulla grandezza in esame. Ovviamente ciò è relativo al sistema di riferimento teorico nel cui ambito si colloca la misura.

Modelli teorici diversi definiscono in modo diverso la stessa grandezza — ammesso che sia ancora la stessa; si pensi all'energia, per esempio, definita nei contesti meccanico, elettromagnetico, relativistico, ecc. — e ne determinano tecniche di misura diverse. E' nell'ambito del modello che lo sperimentatore matura la convinzione di trovarsi di fronte ad una grandezza «ben determinata» oppure ad uno spettro di valori della stessa e decide sull'opportunità di esprimere il risultato della misura con un solo valore — corredato della relativa incertezza — oppure in modo più complesso fornendo intervalli di variabilità, frequenze di valori, ecc..

Si pensi ad esempio al significato diverso delle misure di Bucherer (3) della massa dell'elettrone nel contesto classico e nel relativistico; o ad un esperimento alla Stern (4) per la misura della velocità delle molecole di un gas. In quest'ultimo caso si riconosce come

(3) R. Resnick, «*Introduzione alla Relatività Ristretta*», Milano, 1969, pag. 127.

(4) F. Reif, «*Fisica Statistica*», Bologna, 1974, pag. 268.

importante non la velocità della singola molecola, ma la distribuzione della velocità.

Ancora si pensi ad un esperimento elementare molto noto come attività di laboratorio realizzata dagli studenti a gruppi: la determinazione della carica degli ioni del rame (P.S.S.C., Fisica, Guida del laboratorio, vol. 2, pag. 35, Bologna 1970). I valori che si ottengono cadono fra 1 e 2. Evidentemente sarebbe privo di senso assumere come valore della carica dello ione del rame un qualsivoglia valore medio fra quelli ottenuti: il risultato di un esperimento non è univoco, esso assume determinazioni diverse in relazione al quadro teorico in cui si colloca l'esperimento. In una misura, la distribuzione dei risultati può essere più significativa dei valori stessi e fornire importanti elementi ai fini di una stima della coerenza del modello.

Misure e valori medi

In certi casi, un determinato quadro teorico consente di rappresentare il risultato di una misura con un solo valore — a meno dell'indecisione —. Ciò richiede di operare sull'insieme dei valori ottenuti una sorta di «passaggio al quoziente» che produce un valore atto a rappresentare il risultato della misura. La consuetudine vuole che, in questi casi, si assuma come valore medio la media aritmetica dei valori ottenuti.

D'altra parte è buona metodologia didattica problematizzare e motivare, per quanto è possibile in una scuola secondaria, questa scelta.

E' noto che il significato della media di una serie di valori di una grandezza è determinato solo quando sia assegnata una funzione di questa di cui si vuole determinare sinteticamente il valore (5).

Per illustrare questa affermazione proponiamo alcuni problemi sulle medie.

Assumiamo che l'istogramma di Fig. 1 rappresenti la distribuzione dei diametri di un gruppo di N sbarre cilindriche di eguali lunghezze.

Problema N. 1. — Si vuole applicare uno strato di vernice alla superficie laterale delle sbarre; ai fini del calcolo della quantità di vernice necessaria, quale valore assumere per il diametro medio delle sbarre?

Problema N. 2. — Le sbarre vengono inserite «in serie» in un circuito elettrico come resistori; quale valore assumere come diametro medio ai fini del calcolo della resistenza totale?

Problema N. 3. — Le sbarre vengono inserite in un circuito elettrico come resistori «in parallelo»; quale valore assumere come diametro medio ai fini del calcolo della resistenza totale?

Soluzione del problema N. 1. — La superficie laterale totale delle sbarre è $\sum_1^N \pi d_i l$, dove l indica la loro comune lunghezza e d_i il diametro della sbarra i-esima. Si pensi ora di sostituire alle prime, altre N sbarre di lunghezza l, ma dotate di uno stesso diametro d. Quale dev'essere il valore di d affinché la superficie di questo secondo insieme di sbarre sia eguale a quella reale? Ciò porta a definire d come media aritmetica dei diametri.

Soluzione dei problemi N. 2 e N. 3 — La resistenza di ciascuna sbarra è inversamente proporzionale al quadrato del suo diametro, ovvero è data da $\dfrac{K}{d_i^2}$, se si indica con K il fattore di proporzionalità.

La resistenza totale è espressa da

$$\sum_1^N \frac{K}{d_i^2}$$

quando le sbarre sono in serie, e da

$$\frac{1}{\sum_1^N \dfrac{d_i^2}{K}}$$

quando sono in parallelo.

Se, come prima, pensiamo di aver a che fare con N sbarre eguali, disposte rispettivamente in serie e in parallelo, la resistenza totale sarà

$$N\frac{K}{d_s^2} \qquad \frac{1}{N}\,\frac{K}{d_p^2}$$

ove d_s e d_p indicano i diametri comuni (medi) nei due casi.

Essi risultano quindi espressi rispettivamente da

$$d_s = \sqrt{\frac{N}{\sum_1^N \dfrac{1}{d_i^2}}} \qquad d_p = \sqrt{\frac{\sum_1^N d_i^2}{N}}$$

I problemi conducono quindi a formulare medie diverse, dotate di proprietà che rendono l'una o l'altra adatta al calcolo sintetico di una funzione della grandezza di cui è assegnata la distribuzione.

(5) O. Chisini, «*Sul concetto di media*», Periodico di Matematiche, Vol. IX, 1929.

Si noti, tuttavia, che la popolazione dei diametri delle sbarre è costituita da individui intrinsecamente diversi, nel senso che le variazioni che si ottengono nella misura del singolo sono di gran lunga inferiori alle variazioni che si rilevano passando dall'uno all'altro individuo. La situazione è analoga a quella che si presenta in un esperimento alla Stern per la misura della velocità delle molecole di un gas che abbiamo già ricordato: l'espressione «velocità media delle molecole» acquista significato fisico solo nella misura in cui è collegata ad una ben determinata funzione della velocità, ad esempio la pressione.

La Fig. 2 vuole schematizzare questa situazione.

Ma la situazione con cui si ha più spesso a che fare nell'attività didattica è radicalmente diversa; la popolazione da misurare è costituita da un solo individuo — ovvero la grandezza è «ben definita» — ma lo strumento produce una dispersione di risultati (Fig. 3).

Ovviamente il giudizio sulla situazione, cioé se si tratti di quella di Fig. 2 o di quella di Fig. 3 o di una contaminazione delle due, viene espresso dallo sperimentatore sulla base di convinzioni dettate dal quadro teorico o dall'analisi dei dati dello esperimento.

In ambedue i casi la media ha il compito di rappresentare una popolazione di valori, ma nell'ultimo essa viene caricata di un significato che non è quello di «valor medio ai fini del calcolo di....» e che, in relazione a quanto verrà richiamato nella Parte II, ne giustifica, in parte, la determinazione aritmetica.

Distribuzioni e medie

Le popolazioni di valori prodotte dalle misure possono essere, com'è noto, descritte più o meno fedelmente nel linguaggio della statistica matematica. Tuttavia la deduzione matematica dei classici tipi di distribuzione — la gaussiana, la poissoniana, ecc. — è poggiata su degli assunti che, perfettamente leciti dal punto di vista matematico, non sempre presentano un adeguato riscontro nella realtà del laboratorio e, comunque, lo studio della corrispondenza fra le ipotesi e la realtà fisica presenta sempre grosse difficoltà.

Pertanto, anche se non mancano le deduzioni elementari dei tipi più comuni di distribuzioni, in particolare di quella normale (6), la loro introduzione nell'insegnamento non contribuisce alla formazione di un corretto atteggiamento mentale di fronte alla misura.

(6) Si veda ad es. B. De Finetti, *«Come giustificare elementarmente la legge normale della probabilità»*, Periodico di Matematiche, Vol. XIV, 1934.

Il fatto fisico fondamentale è che un procedimento di misura non fornisce un numero reale ma una distribuzione di valori. La decodificazione delle informazioni di cui sono portatori i risultati nel loro complesso è compito dello sperimentatore; egli la porta a termine nell'ambito delle conoscenze precedenti e nel modello fisico teorico. Può accadere che dai valori ottenuti l'operatore ricavi solamente l'informazione che lo strumento è guasto o non è adatto per la misura progettata; in altri casi lo sperimentatore giudica i risultati «coerenti» e si ritiene autorizzato, dopo aver fatto N misure, a fare previsioni sul risultato della (N+I)-esima. Ciò richiede l'individuazione di un intervallo nel quale la (N+I)-esima misura abbia un'alta probabilità di cadere e quindi un valore di riferimento — oltre ad una ampiezza — per la sua definizione.

Questo viene di solito identificato con la media aritmetica, la quale presenta i seguenti vantaggi:

a) è facile da calcolare

b) gode della proprietà di cui alla parte seguente.

PARTE II - Come misurare l'attendibilità

Siano $\{x_1, x_2, \dots\dots, x_N\}$ N osservazioni di una stessa grandezza X di eguale accuratezza, alcune delle quali eventualmente eguali fra loro.

I fattori «interni» alla misura che ne determinano il grado di attendibilità sono il numero delle prove e la «dispersione» dei valori.

Ci proponiamo di definire con esattezza la dispersione dei risultati ottenuti.

A tale scopo assumiamo arbitrariamente una x^* come origine e ad essa riferiamo i valori:

$$s_i = x_i - x^*.$$

Cerchiamo quindi una funzione delle s_i e di N che soddisfi alle seguenti condizioni (7):

a) deve essere positiva

b) deve essere simmetrica nelle s_i poiché non vi sono valori privilegiati

c) dev'essere una funzione crescente del valore assoluto di ciascuna delle s_i

d) dev'essere normalizzata in N

e) deve avere le stesse dimensioni fisiche di X, e quindi di ogni s_i, perciò dev'essere omogenea nelle s_i con grado di omogeneità 1.

(7) G. Castelnuovo, *«Calcolo delle Probabilità»*, Vol. I, Cap. XII, Bologna 1925.

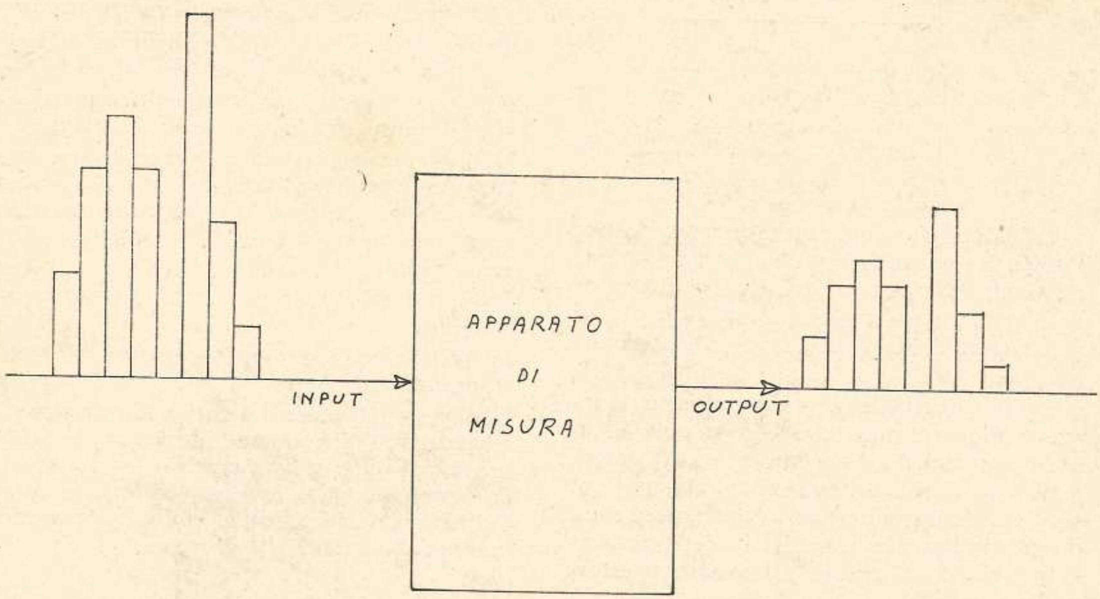
APPARATO
DI
MISURA
INPUT
OUTPUT

Fig. 2.

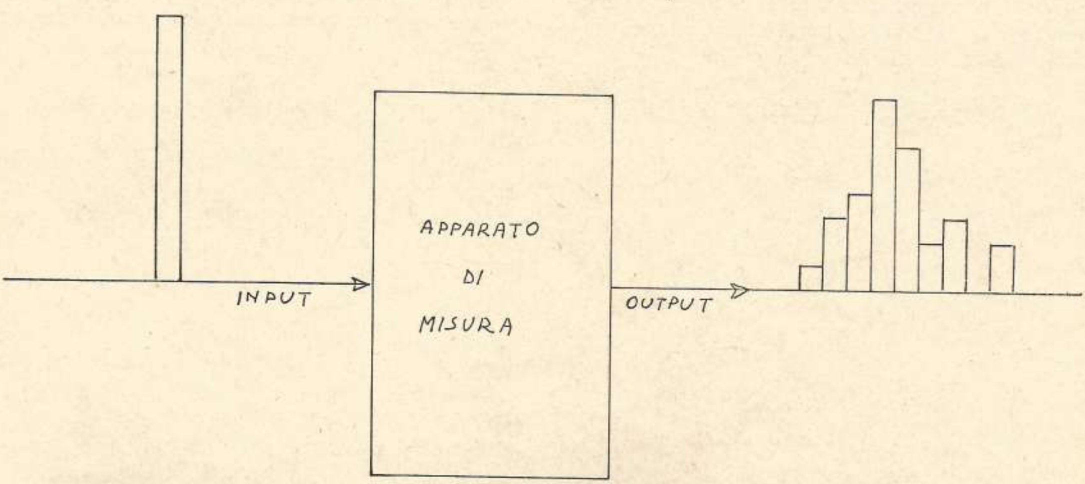
APPARATO
DI
MISURA
INPUT
OUTPUT

Fig. 3.

Tra le infinite funzioni che soddisfano a queste condizioni, due sono particolarmente semplici:

$$f_1 \equiv \frac{|s_1| + |s_2| + \ldots + |s_N|}{N} \qquad (1)$$

$$f_2 \equiv \sqrt{\frac{s_1^2 + s_2^2 + \ldots + s_N^2}{N}} \qquad (2)$$

Ambedue le funzioni potrebbero essere adottate per i nostri fini, ma la (2) si presta meglio della (1) alle trasformazioni a cui occorre sottoporla nei vari problemi — la (1), diversamente dalla (2) non è una funzione analitica —.

La (2), tuttavia, ha ancora un difetto: il suo valore dipende, oltre che dalle x_i e da N, anche dal punto di riferimento x^* e ciò la rende inefficace ai fini del confronto con altre misure. Conveniamo pertanto di assumere come punto di riferimento quello in corrispondenza del quale la funzione (2) assume il valore minimo.

Ovvero si richiede di determinare per quale valore di x^*, è minima la funzione

$$F(x^*) = \sum_1^N (x_i - x^*)^2$$

Pochi passaggi di algebra elementare consentono di riscrivere la funzione come polinomio di II grado in x^* (Fig. 4).

$$F(x^*) = N\, x^{*2} - 2\,(\sum x_k)\, x^* + (\sum x_k^2)$$

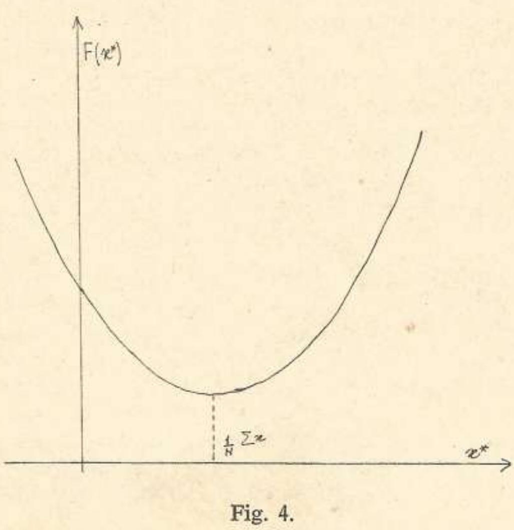

Fig. 4.

Esso assume il valore minimo in

$$x^* = \frac{\sum x_k}{N}$$

La funzione (2) assume il valore minimo quando come punto di riferimento si assuma la media aritmetica dei valori. La (2) ridefinita assumendo $x^* = \bar{x}$, prende il nome di deviazione standard; il radicando di varianza.

La deviazione standard D rappresenta, per così dire, l'unità di misura naturale per la descrizione della distribuzione degli scarti. E' noto che generalmente essi soddisfano alle seguenti caratteristiche:

a) sono disposti, grosso modo, simmetricamente;

b) quelli piccoli sono più frequenti di quelli grandi.

Se la popolazione dei dati a disposizione è ritenuta sufficientemente numerosa, lo sperimentatore può individuare un intervallo, la cui ampiezza viene espressa in termini di D, in cui un'ulteriore misura abbia un'alta probabilità di cadere.

PARTE III - Il Best Fit rettilineo

Un problema di geometria elementare

Siano $y_1, y_2, \ldots\, y_N$ i valori di una grandezza Y ottenuti in corrispondenza dei valori $x_1, x_2, \ldots\, x_N$ di una grandezza X assunta come variabile indipendente.

In un grafico cartesiano le N coppie di valori saranno rappresentate da N punti (Fig. 5).

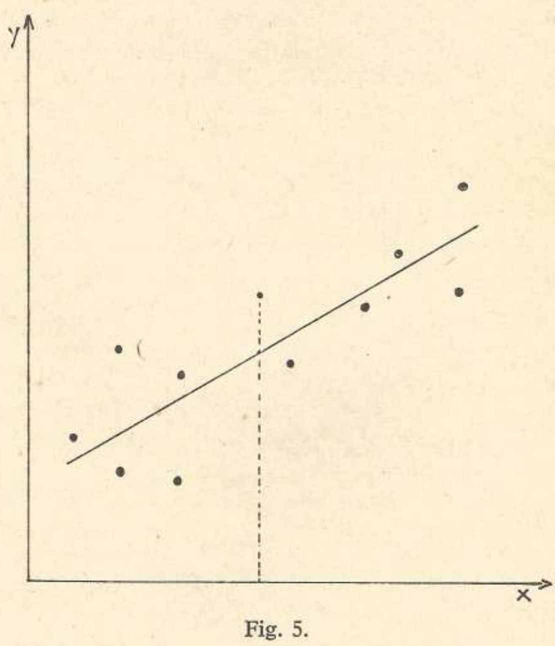

Fig. 5.

Sia $y = a + bx$ una retta del piano; essa associa ad ognuna delle x_k un valore che scarta da y_k di

$$s_k = y_k - (a + bx_k)$$

Il problema è: determinare i coefficienti a e b in modo che sia minima la somma dei quadrati degli scarti, ovvero la funzione

$$S = \sum_{k=1}^{N} s^2_k = \sum_{k=1}^{N} (y_k - a - bx_k)^2 \qquad (3)$$

che si può anche scrivere come trinomio in a

$$S = N\, a^2 - 2\, [\sum y_k - b \sum x_k]\, a + + [\sum y^2_k + b^2 \sum x^2_k - 2\, b \sum x_k\, y_k]$$

oppure in b

$$S = [\sum x^2_k]\, b^2 - 2\, [\sum x_k\, y_k - a \sum x_k]\, b + + [\sum y^2_k + Na^2 - 2a \sum y_k]$$

Questi trinomi assumono il valore minimo rispettivamente in

$$\bar{a} = \frac{\sum y_k - b \sum x_k}{N} \qquad (4)$$

$$\bar{b} = \frac{\sum x_k\, y_k - a \sum x_k}{\sum x^2_k} \qquad (5)$$

La (3) sarà minima quando si verificano entrambe le condizioni precedenti. La risoluzione del sistema di equazioni lineari (4) e (5) fornisce i valori richiesti per $\bar{a}$ e $\bar{b}$:

$$\bar{a} = \frac{\sum y_k \sum x^2_k - \sum x_k \sum x_k\, y_k}{\Delta} \qquad (6)$$

$$\bar{b} = \frac{N \sum x_k\, y_k - \sum x_k \sum y_k}{\Delta} \qquad (7)$$

con $$\Delta = N \sum x^2_k - (\sum x_k)^2 \qquad (8)$$

Le formule (6) e (7) si ricavano in modo del tutto elementare, ma la loro applicazione effettiva presenta grosse difficoltà quando si debbano fare i calcoli. Tuttavia la diffusione recente dei calcolatori tascabili anche nella scuola ha praticamente azzerato questa difficoltà. Alcuni di questi, di prezzo accessibile, sono programmati per il calcolo automatico della (6) e della (7).

Fisica dei minimi quadrati

I coefficienti calcolati nella sezione precedente di per sè non hanno alcun significato fisico: l'interpretazione fisica delle espressioni matematiche ha luogo nell'ambito del quadro teorico e del modello assunto per il fenomeno che si studia.

Quando si siano fatte N misure di una grandezza Y in corrispondenza di N valori di una grandezza X, un'equazione lineare di coefficienti (6) e (7) è sempre determinabile; ma essa acquista significato fisico nella misura in cui risulta possibile esprimere previsioni sul risultato della (N + I)-esima misura.

Alcune delle ipotesi generalmente assunte, ma non esplicitate, per molte delle misure che si compiono in Fisica elementare sono le seguenti (8):

a) la misura della variabile dipendente è affetta da incertezza, mentre le incertezze sulla variabile X sono trascurabili;
b) i valori della variabile dipendente sono influenzati non solo dai valori corrispondenti della X, ma anche da certi fattori incontrollabili, di modo che, per ogni valore di X, il valore corrispondente di Y è soggetto ad una certa dispersione aleatoria;
c) i dati sperimentali di cui disponiamo o certe considerazioni di carattere teorico suggeriscono che tra le due variabili sussista una relazione lineare.

In tal caso ogni valore di Y misurato sarà esprimibile come somma di due contributi di cui il primo è a carattere aleatorio ed il secondo, di carattere non aleatorio, è una forma lineare in x:

$$y = s + (a + bx)$$

dove s è la variabile aleatoria (scarto).

Siamo quindi condotti con naturalezza, in analogia al caso in cui x è costante, trattato nella Parte II, alla ricerca di quei valori dei coefficienti in corrispondenza dei quali è minima la somma dei quadrati degli scarti, cioè alle formule (6) e (7).

In analogia con la (2) è possibile definire la «deviazione standard» dei valori sperimentali della Y rispetto alla retta così determinata:

$$D_y = \sqrt{\frac{\sum s^2_k}{N-2}}$$

ove la scelta del denominatore è dovuta al fatto che, quando i punti sperimentali sono solo due, l'ipotesi della linearità della correlazione è verificata con incertezza infinita.

Fissato un valore x' per la grandezza X, ad esso la relazione lineare di coefficienti (6) e (7) associa un valore y' della grandezza Y.

---

(8) S. Aivazian, «*Etude statistique des dépendances*», Moscou 1970, Cap. 2.

D_y rappresenta l'ordine di grandezza di un intorno di y' in cui ha un'alta probabilità di cadere la misura effettiva di y.

Nella pratica tradizionale si riportano i punti in un diagramma cartesiano e si traccia ad occhio una retta attenendosi in genere ai seguenti criteri (Fig. 6):

a) la somma delle distanze dalla retta dei punti che le stanno da una parte deve essere eguale alla somma delle distanze dei punti che le stanno dall'altra;

b) queste somme devono essere minime.

I risultati che si ottengono sono quasi sempre accettabilmente prossimi a quelli calcolati in modo rigoroso; ciò non toglie tuttavia

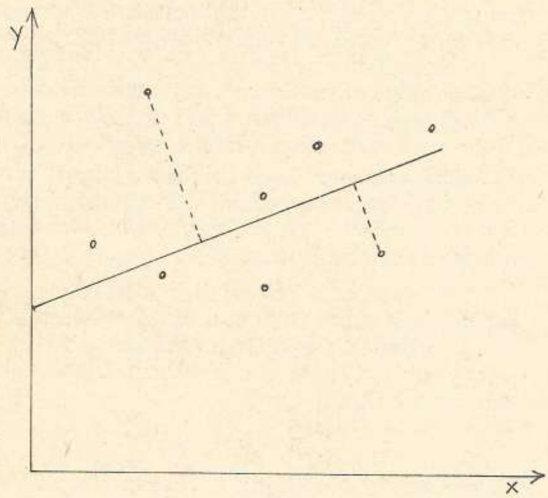

Fig. 6.

che il metodo sia del tutto errato dal punto di vista concettuale. Infatti il piano della rappresentazione grafica delle coppie dei valori assunti simultaneamente da due grandezze fisiche X e Y non gode delle proprietà metriche che caratterizzano il piano euclideo al quale si riferisce usualmente la geometria analitica elementare.

Così, poiché le unità di misura sui due assi sono del tutto arbitrarie — determinate in genere da motivi estetici o di spazio che non hanno niente a che vedere con il fenomeno fisico — nel piano del grafico sono da considerare solo le proprietà geometriche che si conservano nelle affinità di equazioni

$$x' = k\,x$$
$$y' = h\,y.$$

Ad esempio, le nozioni di perpendicolarità e quindi di distanza di un punto da una retta, cadono. Analogamente, le distanze non parallele agli assi — geometricamente descritte da espressioni del tipo

$$\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

— sono destituite di significato fisico.

E' gradito dovere esprimere i miei ringraziamenti all'amico prof. Maurizio Francesio, del Liceo Scientifico di Mantova; le considerazioni qui esposte hanno preso corpo nel corso delle molte, accanite discussioni che abbiamo avuto sull'argomento.