

Un'esercitazione elementare di meccanica: determinazione della massa di una binaria

1. INTRODUZIONE

Nella sostanza, un corso elementare di meccanica è l'esposizione di un corpo organico di assiomi. Di questi, alcuni vengono esplicitamente enunciati e costituiscono quelli che, in ogni libro di testo, vengono chiamati i *Principi* e le *Leggi* di Newton, altri (struttura euclidea dello spazio, esistenza di un tempo universale ed assoluto, ecc.) vengono taciuti oppure trovano immediatamente riconosciuto il loro carattere « assiomatico ». Per i primi si cerca di giustificare la loro elevazione al rango di *principi* attraverso esperimenti descritti o progettati e proposti agli studenti.

Ora, se l'insegnamento tende, come deve, a proporre la *newtoniana* non come *LA MECCANICA*, ma come *una* possibile meccanica — che consente l'organizzazione logico-unitaria di un certo ordine di fenomeni, limitatamente ad un certo rango di velocità e di dimensioni — si deve riconoscere che una trattazione di questo genere è carente per vari aspetti. Se si vuole, infatti, che lo studente acquisti consapevolezza dei processi che portano alla costruzione di una teoria scientifica e del significato stesso dell'opera di teorizzazione, è necessario porre l'enfasi anche su fattori diversi da quello della pura « verifica sperimentale » dei principi e che giocano un ruolo importante nella genesi e nell'affermazione di una teoria. [1].

Uno di questi fattori è rappresentato dalla « potenza » della teoria, ovvero dall'ampiezza dello spettro dei problemi che consente di porre e, in linea di principio, di risolvere. L'esercitazione che proponiamo consente allo studente di acquisire una qualche esperienza della potenza della meccanica newtoniana.

I motivi che hanno determinato la scelta di questo problema sono schematizzabili come segue:

a) esso presenta aspetti di grande rilevanza culturale e può costituire il nucleo per la formazione di altri interessi;

b) è affrontabile con la scorta di conoscenze di meccanica acquisibili in un corso a livello liceale;

c) ripropone alla considerazione dello studente, in modo più motivato, alcune fondamentali nozioni di meccanica, geometria, trigonometria;

d) è proponibile nei suoi termini reali e cioè non edulcorato e ridotto a pura applicazione di formule;

e) non è né banale né ovvio e proprio nel suo carattere non meramente scolastico è riscontrabile un elemento di gratificazione per lo studente;

f) i risultati dell'esercitazione dipendono dalla cura con cui viene condotta e quindi non sono univoci e consentono il confronto e la discussione.

2. LA TERZA LEGGE DI KEPLERO

Gli ingredienti necessari per la deduzione della terza legge di Keplero sono:

a) gli assiomi della meccanica newtoniana

b) la legge di forza (gravitazionale).

Si considerino due corpi di massa rispettivamente M ed m che interagiscono conformemente alla legge (b). Assumiamo, per semplicità, orbite circolari e distinguiamo il caso in cui $M \gg m$ da quello in cui $M \sim m$.

Sia $M \gg m$. In questo caso un sistema di riferimento solidale con M è, con buona approssimazione, inerziale e la legge di

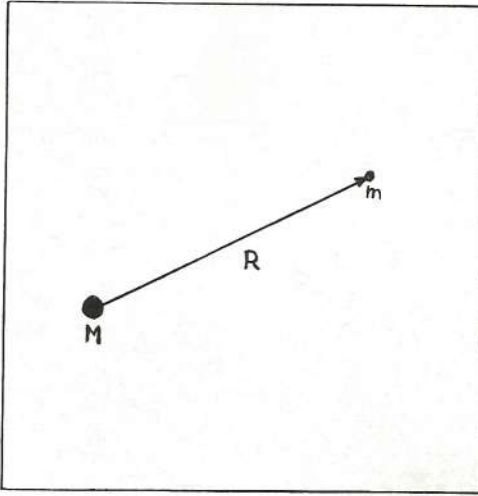


fig. 1

Keplero risulta dal confronto della legge di forza e del secondo assioma di Newton:

$$(1) \quad \mathbf{f}_m = -G \frac{mM}{R^3} \mathbf{R}$$

legge di forza (fig. 1)

$$\mathbf{f} = m \mathbf{a}$$

secondo assioma di Newton

$$\text{con } \mathbf{a} = -\frac{4\pi^2}{T^2} \mathbf{R}$$

Se ne deduce

$$(2) \quad \frac{R^3}{T^2} = \frac{G}{4\pi^2} M$$

Nella formulazione kepleriana si afferma solo la costanza del rapporto R^3 / T^2 ; la (2) contiene di più l'ipotesi di Newton che tale costante sia proporzionale alla massa del corpo centrale. Nel caso in cui l'orbita non sia circolare, nella (2), al posto di R , compare il semiasse maggiore a dell'orbita ellittica.

Come cambia la (2) nel caso in cui $M \sim m$?

Non è più lecito considerare come inerziale un sistema di riferimento solidale con M ; in esso non sussistono gli assiomi della meccanica Newtoniana.

Si assuma quindi un referenziale baricentrico (fig. 2). Per definizione

$$(3) \quad M \mathbf{r} + m \mathbf{R} = \mathbf{0}$$

ove \mathbf{r} ed \mathbf{R} rappresentano i vettori che dal

baricentro O vanno rispettivamente ad M (posta in P_1) e ad m (posta in P_2).

In questo sistema la forza subita da m sarà espressa da

$$(4) \quad \mathbf{f}_m = G \frac{mM}{|P_1P_2|^3} \mathbf{P}_2P_1$$

Ora, per la (3),

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_2P_1 &= -\mathbf{R} + \mathbf{r} = -\mathbf{R} - \frac{m}{M} \mathbf{R} = - \\ &= -(1 + m/M) \mathbf{R}. \end{aligned}$$

Sostituendo quest'ultima nella (4), si ottiene

$$(5) \quad \mathbf{f}_m = -Gm \frac{M^3}{(m+M)^2} \frac{\mathbf{R}}{R^3}$$

In conclusione, tutto avviene come se il corpo m fosse attratto dal centro di gravità in cui fosse concentrata la massa

$$M$$

$$\frac{m}{(1 + \frac{m}{M})^2}$$

La (2) assumerà quindi la forma

$$(6) \quad \frac{a_2^3}{T^2} = \frac{G}{4\pi^2} \frac{M}{(1 + \frac{m}{M})^2}$$

ove a_2 rappresenta il semiasse maggiore dell'orbita ellittica descritta, nel sistema di riferimento baricentrico, dal corpo di massa m .

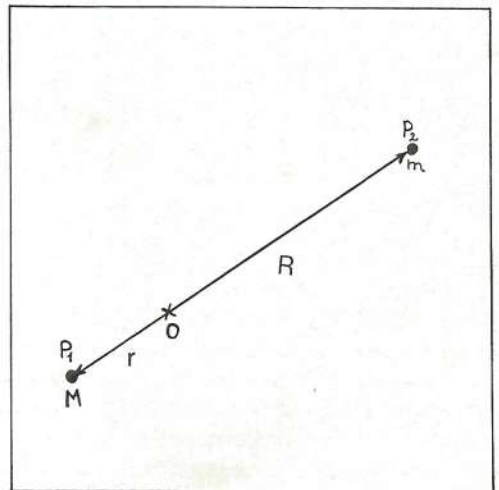


fig. 2

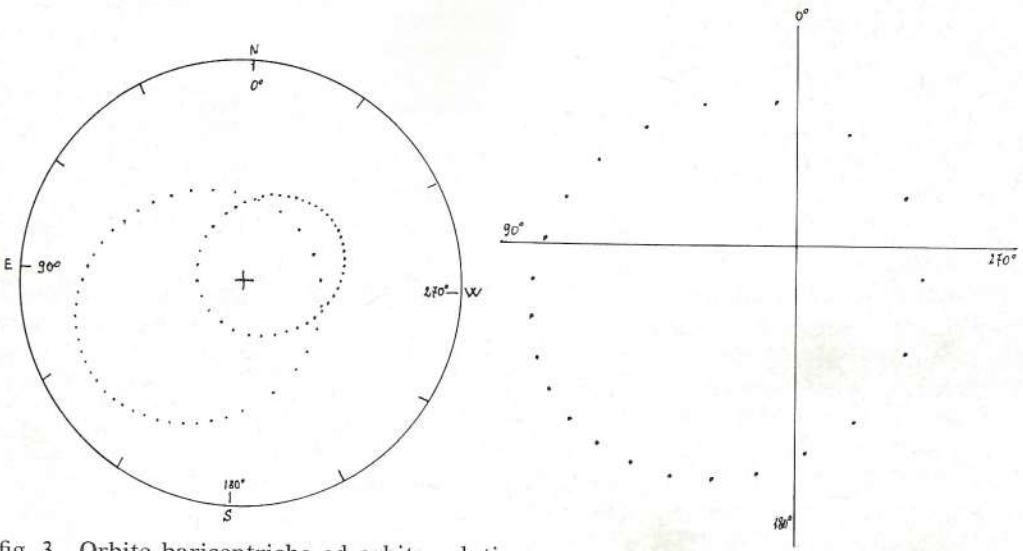


fig. 3 - Orbite baricentriche ed orbita relativa

La terza legge di Keplero nella formulazione (6) consente il calcolo delle masse M ed m quando si conoscano il periodo del moto ed i semiassi a_1 ed a_2 delle orbite descritte rispettivamente da M ed m nel sistema di riferimento baricentrico. Nel caso di una binaria visuale tuttavia la determinazione delle orbite assolute delle due componenti è possibile solo raramente e richiede sofisticati strumenti di calcolo. E' quindi necessario esprimere a_2 in termini dei parametri dell'orbita che m descrive nel sistema di riferimento di M . A questo scopo, dalla relazione ovvia

$$(3') \quad a_1 M = a_2 m$$

si ricava

$$a_2 = \frac{M}{m + M} (a_1 + a_2)$$

e sostituendo quest'ultima nella (6), si perviene a

$$(7) \quad \frac{(a_1 + a_2)^3}{T^2} = \frac{G}{4\pi^2} (m + M)$$

che rappresenta la terza legge di Keplero nei parametri dell'orbita che m descrive intorno ad M (fig. 3).

Se si assume poi di misurare le masse in masse solari, il periodo in anni ed i semiassi in unità astronomiche, la (7) assume la forma

$$(8) \quad \frac{a^3}{T^2} = m + M$$

ove si è posto $a = a_1 + a_2$,

Concludendo, la (8) consente la determinazione della massa totale di una stella binaria quando si conoscano il periodo di rivoluzione ed il semiasse dell'orbita che la secondaria descrive intorno alla principale.

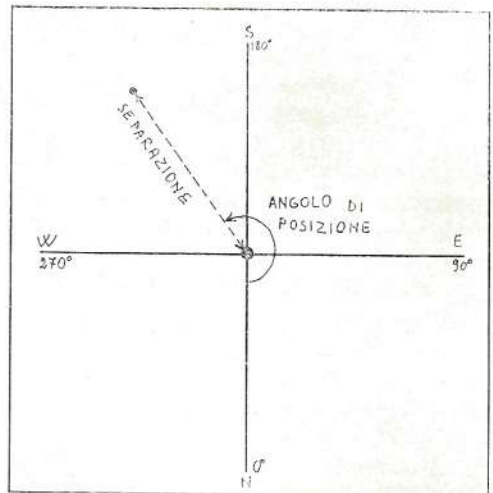


fig. 4 - Angolo di posizione e separazione del « compagno » rispetto alla principale.

TAV. 1 - 70 OPH.

TAV. 1 - 70 OPH.

epoch	observed position angle	observed distance
"	"	"
1830.544	135.93	5.59
1831.560	134.20	5.73
1832.640	133.11	5.60
1833.556	132.29	6.00
1834.568	130.02	6.06
1835.531	129.68	6.17
1836.576	127.99	6.41
1837.616	127.34	6.42
1838.558	125.68	6.56
1839.587	124.70	6.62
1840.517	124.74	6.52
1841.636	123.17	6.66
1842.531	122.64	6.57
1843.463	121.85	6.55
1844.492	120.51	6.52
1845.522	119.96	6.65
1846.557	118.99	6.71
1847.501	118.53	6.75
1848.380	117.47	6.83
1849.390	117.66	6.73
1850.524	115.66	6.80
1851.591	114.84	6.60
1852.672	114.36	6.53
1853.610	113.88	6.44
1854.476	112.62	6.37
1855.606	112.06	6.40
1856.474	111.21	6.36
1857.527	109.58	6.32
1858.474	108.37	6.05
1859.608	107.68	6.30
1860.696	106.22	6.32
1861.702	105.43	6.00
1862.620	104.93	5.80
1863.524	103.73	5.71
1864.561	103.37	5.44
1865.572	100.97	5.31
1866.523	100.44	5.28
1867.443	99.18	5.19
1868.632	97.95	4.93
1869.645	96.55	4.80
1870.520	93.71	4.59
1871.550	92.50	4.38
1872.506	90.75	4.18
1873.547	87.71	3.99
1874.593	86.13	3.79
1875.595	83.51	3.53

epoch	observed position angle	observed distance
"	"	"
1876.585	80.41	3.42
1877.624	77.37	3.21
1878.589	73.93	3.09
1879.529	69.11	2.89
1880.578	63.76	2.69
1881.561	58.46	2.54
1882.604	50.95	2.28
1883.632	43.17	2.27
1884.604	34.58	2.20
1885.607	25.31	2.10
1886.634	13.62	1.98
1887.636	2.82	2.03
1888.588	353.03	2.03
1889.578	344.71	2.05
1890.613	335.57	2.23
1891.567	327.02	2.31
1892.564	319.58	2.29
1893.611	310.87	2.32
1894.625	304.32	2.39
1895.573	296.67	2.33
1896.622	288.54	2.19
1897.558	281.07	2.04
1898.548	271.42	1.93
1899.577	258.82	1.80
1900.572	244.95	1.72
1901.622	227.26	1.67
1902.640	211.53	1.71
1903.583	197.37	1.74
1904.573	186.49	1.94
1905.552	178.60	2.17
1906.614	170.28	2.39
1907.602	164.60	2.74
1908.562	159.96	3.01
1909.561	155.32	3.21
1910.591	151.51	3.49
1911.561	148.98	3.73
1912.596	146.71	3.90
1913.534	143.70	4.14
1914.521	141.63	4.42
1915.521	139.86	4.57
1916.540	138.22	4.84
1917.555	136.21	4.94
1918.594	135.47	5.20
1919.590	134.14	5.36
1920.572	132.84	5.58
1921.559	131.31	5.76

TAV. 1 - 70 OPH.

epoch	observed position angle	observed distance
1922.616	130.40	5.84
1923.548	129.25	5.99
1924.545	127.96	6.06
1925.580	127.09	6.11
1926.551	125.85	6.28
1927.573	125.48	6.35
1928.617	124.25	6.45
1929.604	122.47	6.43
1930.608	122.17	6.62
1931.552	121.20	6.61
1932.513	121.00	6.67
1933.592	120.31	6.60
1934.57	118.83	6.62
1915.248	140.38	4.571
1916.798	137.80	4.910
1919.248	134.30	5.361
1922.433	130.59	5.844
1931.265	121.81	6.634
1932.448	120.87	6.681
1935.561	118.25	6.766

TAV. 2 - ZETA HER

a	b	c
1782.55	69.3	<170
1826.63	23.4	0.91
1828-1831	single	
1835.45	169.9	1.09
1842.61	138.9	1.19
1850.00	96.9	1.50
1861.57	17.1	1.05
1864-1865	single	
1869.58	200.6	1.09
1886.63	85.0	1.54
1887.63	78.8	1.59
1888.46	78.8	1.38
1888.60	75.5	1.58
1889.52	72.6	1.67
1890.77	64.2	1.46
1891.60	60.4	1.66
1892.63	55.7	1.37
1893.65	49.4	1.38
1894.52	42.1	0.85
1894.70	40.1	1.21
1895.34	34.2	1.12
1895.44	37.9	0.67
1895.52	47.6	1.28
1895.58	29.4	0.93
1896.46	6.0	0.54
1896.47	14.7	0.81
1896.53	50.7	1.40
1897.40	2.3	0.45
1897.54	16.1	0.7
1897.60	344.2	0.66
1897.63	352.0	0.20
1898.33	314.2	0.63
1898.62	352.4	0.5
1898.64	287.8	0.57
1898.76	289.6	0.45
1899.44	274.0	0.50
1899.39	265.3	0.58
1899.86	265.3	0.35
1900.56	239.7	0.75
1901.57	225.1	0.88
1901.73	233.5	1.20
1902.47	212.7	1.33
1902.57	216.1	1.03
1903.50	203.6	1.00
1903.53	201.0	1.41
1904.49	196.3	1.15
1905.44	187.6	1.21

3. COSTRUZIONE DELL'ORBITA APPARENTE E QUESTIONI CONNESSE

Mediante l'osservazione visuale o fotografica di una binaria è possibile determinare le coordinate (polari) del compagno rispetto alla stella principale (fig. 4). Ovviamente esse si riferiscono alla posizione apparente cioè alla proiezione della posizione reale nello spazio su un piano normale alla congiungente osservatore-stella. L'elisse descritta realmente dal compagno intorno alla stella principale viene quindi vista in proiezione. Si noti che il centro dell'orbita reale si proietta nel centro dell'orbita apparente, ma il fuoco della prima, in generale, non si proietta nel fuoco della seconda. Tuttavia, poichè, in proiezione, i rapporti fra le aree si conservano, la legge delle aree di Keplero deve valere anche per l'orbita apparente.

Il materiale fornito agli studenti è il risultato di osservazioni visuali o fotografi-

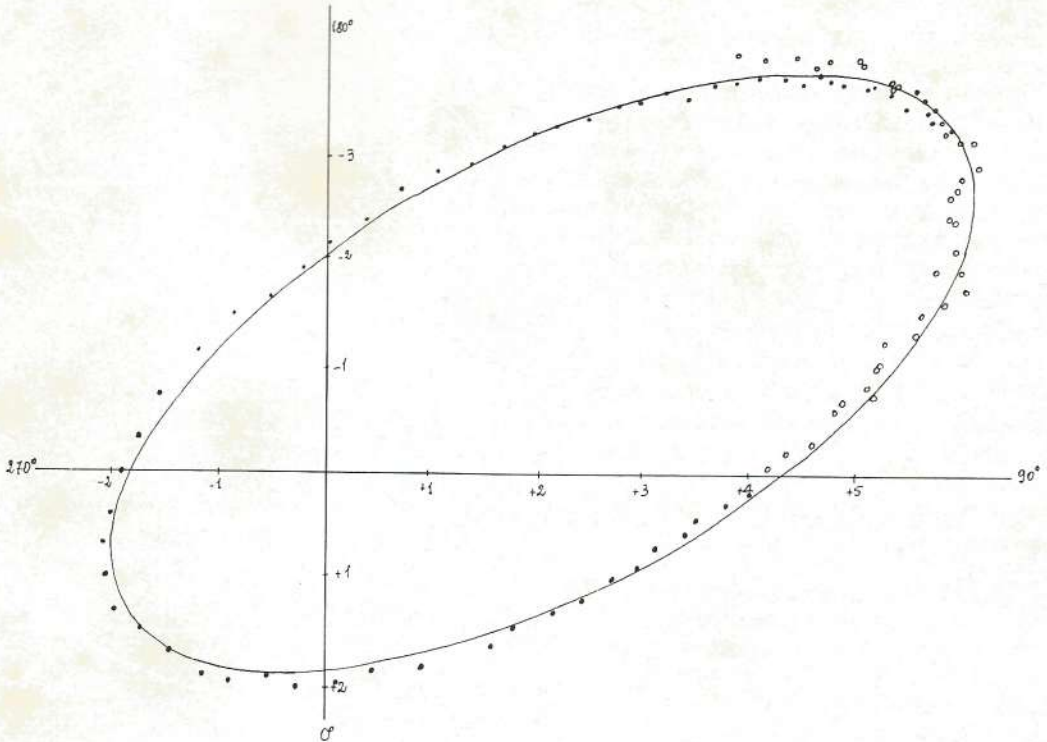


fig. 5

TAV. 2 - ZETA HER

1906.57	176.9	1.19
1907.54	170.6	1.24
1908.53	161.2	1.22
1909.51	153.7	1.21
1910.55	143.8	1.25
1911.54	138.5	1.24
1912.53	132.9	1.29
1913.56	123.4	1.32
1914.45	115.9	1.36
1915.52	110.9	1.38
1916.44	105.6	1.45
1917.52	100.6	1.51
1918.43	97.2	1.59
1919.57	90.3	1.63
1920.42	86.6	1.49
1921.48	81.8	1.58
1922.54	78.0	1.71
1923.55	72.4	1.68
1924.47	67.4	1.56
1925.48	62.8	1.54
1926.50	57.7	1.50

che condotte per tempi generalmente pari o superiori al periodo della stella. Dati di questo genere sono reperibili nel monumentale « New General Catalogue of Double Stars » di R.G. Aitken. In tav. 1 sono riportati i dati relativi alla binaria visuale « 70 Ophiuchi ».

E' possibile riportare queste coordinate in un grafico polare e quindi cercare di costruire, con un ellissografo o con il metodo dei due spilli, l'ellisse che meglio «fita» i punti sperimentali. In realtà il problema non è puramente grafico, ma fisico. Infatti, se si trascura un importante elemento di informazione: il tempo. E' quindi opportuno provare sulla orbita tracciata la validità della seconda legge di Keplero ed, in base a ciò, procedere ad eventuali miglioramenti del grafico fino ad arrivare ad una soddisfacente verifica della legge stessa. In fig. 5 è riportata l'orbita apparente di 70 Ophiuchi ottenuta con questo metodo.

Costruita l'orbita apparente, è possibile individuarne il centro come intersezione di una coppia di diametri. Il diametro che passa per l'origine delle coordinate (principale) rappresenta la proiezione dell'asse maggiore dell'orbita reale. Il diametro coniugato è, ovviamente, la proiezione dell'asse minore dell'orbita reale. La fig. 6 illustra la costruzione grafica dei due assi proiettati.

Poichè nella proiezione i rapporti si conservano, il rapporto OS/OP rappresenta l'eccentricità dell'orbita reale.

Sull'orbita apparente si può infine determinare il periodo e l'istante di passaggio al periastro. Ciò può richiedere semplici operazioni di interpolazione.

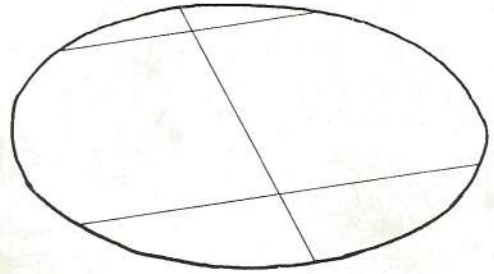
4. COSTRUZIONE DELL'ORBITA REALE

I metodi grafici e analitici classici per la determinazione dei parametri dell'orbita reale [2] [3] [4], pur essendo talvolta di semplice applicazione [5], sono da evitare, in quanto la loro comprensione presuppone conoscenze di geometria generalmente estranee alla formazione di livello liceale. Per i fini che ci proponiamo è suffi-

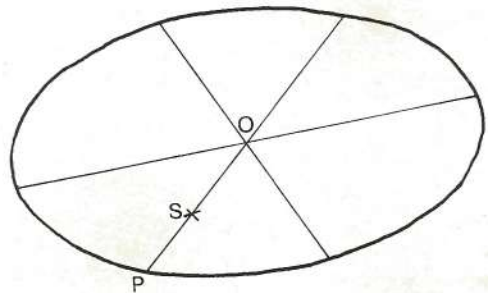
TAV. 3 - CSI BOO

epoch	observed position angle	observed distance
"	"	"
1834.931	328.79	7.246
1844.128	321.07	6.806
1855.157	311.82	6.067
1864.244	301.42	5.576
1871.700	290.85	4.913
1878.968	278.15	4.217
1886.460	259.46	3.556
1893.060	236.37	3.113
1898.381	212.52	2.779
1903.393	186.29	2.615
1908.507	154.53	2.455
1913.053	120.41	2.203
1917.558	84.60	2.264
1922.465	54.09	2.838
1926.898	36.54	3.330
1931.288	23.93	4.066
1933.310	19.47	4.333

fig. 6

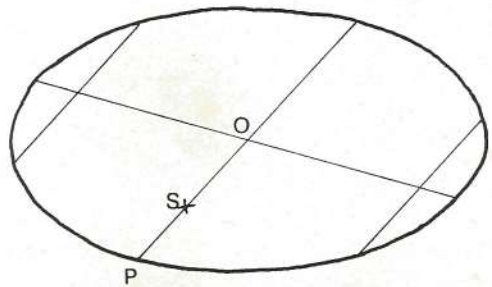


La congiungente i punti medi di due corde parallele è un diametro.



L'intersezione di due diametri individua il centro.

OS è la proiezione dell'asse maggiore dell'orbita reale.



La congiungente i punti medi di due corde parallele ad OS è la proiezione dell'asse minore.

ciente — e più efficace dal punto di vista didattico — il semplice strumento illustrato nelle figg. 7 e 8.

Esso consta di un'intelaiatura che sostiene due lastre di plexiglas; la prima (indicata con a in fig. 7) girevole intorno ad un asse (P, P_2), la seconda (b) fissa. Es-

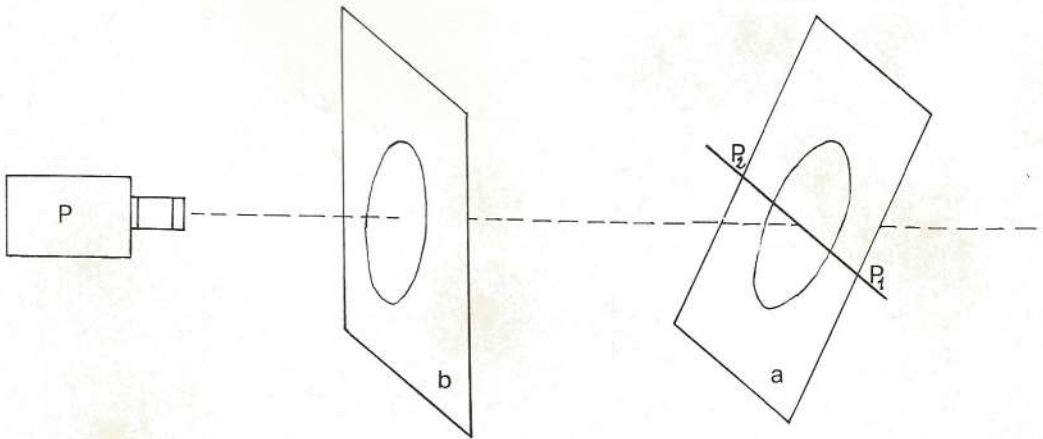


fig. 7

TAV. 4 - GAMMA VIR

epoch	observed position angle	observed distance
"	"	"
1823.000	279.79	2.98
1831.072	258.26	1.67
1833.310	242.16	1.16
1834.369	222.85	1.00
1835.320	197.60	0.52
1836.408	152.83	
1837.406	77.26	
1838.320	52.79	0.81
1839.343	35.14	1.21
1842.920	14.47	1.854
1848.384	0.45	2.674
1853.351	354.18	3.205
1857.950	350.00	3.682
1863.513	345.85	4.134
1868.356	342.53	4.546
1873.658	340.01	4.798
1878.566	338.10	5.117
1883.208	336.05	5.333
1888.830	333.71	5.528
1893.167	331.59	5.665
1898.487	330.15	5.762
1903.449	328.15	5.906
1908.295	326.68	5.975
1913.552	324.86	6.032
1918.306	323.43	5.980
1923.482	321.75	5.964
1928.218	320.21	5.997

epoch	p	d
"	"	"
1914.309	324.44	5.954
1916.248	323.86	5.966
1918.691	323.09	5.960
1929.468	319.63	5.905
1931.258	319.10	5.882
1932.401	318.76	5.858
1932.703	318.60	5.864
1935.355	317.70	5.822

se rappresentano il piano dell'orbita reale e quello dell'orbita apparente. Il grafico dell'orbita apparente, riportato su un foglio di acetato di cellulosa viene assicurato al piano b e la sua immagine viene proiettata, mediante il proiettore P , su un foglio di carta da lucido fissato al piano a . Si ricerca per tentativi l'inclinazione di a e la giacitura dell'orbita apparente rispetto a P_1P_2 in corrispondenza delle quali le proiezioni degli assi OP ed OB sul piano a risultano ortogonali.

Individuata questa posizione, si può tracciare il grafico della orbita reale. L'inclinazione del piano dell'orbita si può leggere su un goniometro posto in corrispondenza di uno dei perni della lastra a .

In fig. 9 è riportato il grafico dell'orbita vera di 70 Ophiuchi.

Sul grafico dell'orbita vera è possibile misurare l'eccentricità; il suo valore si po-

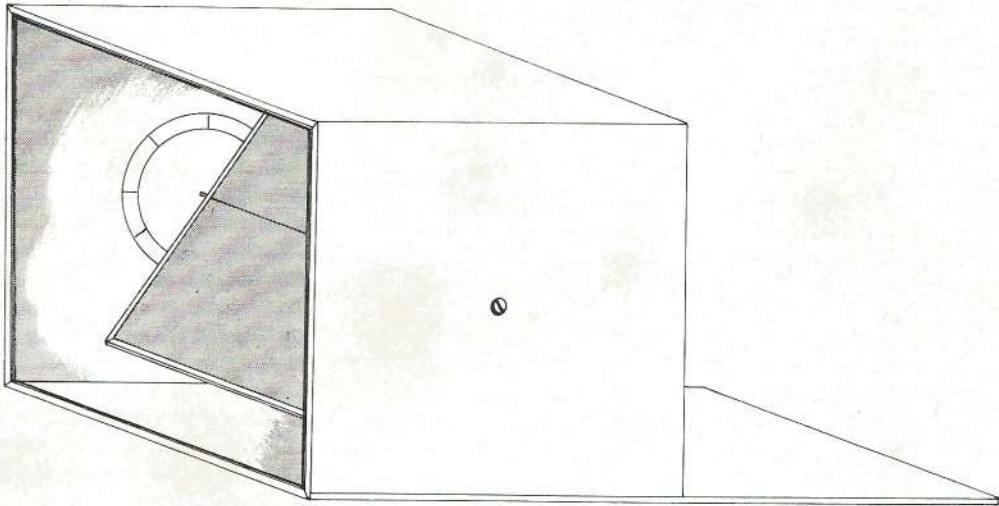


fig. 8

TAV. 5 - CSI UMA

			1907.22	131.8	2.82
			1908.18	130.2	2.30
			1908.28	128.9	2.87
			1909.24	125.5	(2.28)
			1909.30	126.5	2.84
			1910.29	124.5	3.00
			1910.30	124.4	
			1911.37	122.2	3.09
			1912.43	119.6	3.05
			1913.18	(115.8)	(3.51)
			1913.33	119.0	3.09
			1914.24	116.2	2.98
			1915.23	114.9	3.10
			1916.27	112.2	3.03
			1917.15	110.7	3.12
			1918.22	108.0	2.97
			1919.26	106.1	2.96
			1920.22	104.3	3.42
			1920.28	103.8	2.89
			1921.33	101.6	2.86
			1921.39	100.1	3.45
			1921.45	101.3	2.54
			1922.29	98.8	2.82
			1923.35	96.2	2.67
			1924.30	94.2	2.47
			1925.29	89.8	2.26
			1926.27	86.8	2.18
			1926.36	86.6	2.58
			1926.97	83.1	2.17

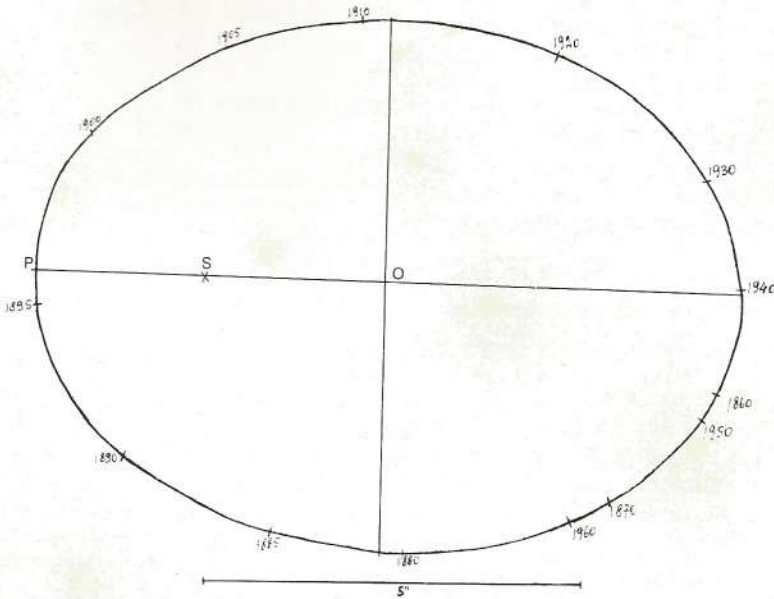


fig. 9

trà quindi confrontare con quello ottenuto sulla orbita apparente. Tale confronto fornisce una misura della bontà del grafico ottenuto. Sullo stesso grafico si ottiene la misura, in secondi d'arco, del semiasse maggiore a'' . Quando si conosce la parallasse π della stella, è possibile ottenere la misura del semiasse in AU:

$$(9) \quad a = a''/\pi$$

Infine, introducendo nella (8) i valori di T e di a , si otterrà la massa totale della stella.

L'errore sulla massa varia da stella a stella in relazione alla qualità ed alla quantità dei dati osservativi disponibili. Se si scelgono stelle a grande separazione, con

osservazioni condotte per tempi confrontabili con i periodi di rivoluzione, le cause prevalenti di errore sono la parallasse e la costruzione dell'orbita apparente, che si ripercuote nella determinazione del semiasse.

Poichè π è generalmente affetta da un errore non inferiore a qualche percento, se si opera con cura, l'errore sulla massa può essere contenuto entro il 10%, ovviamente scegliendo opportunamente le binarie da studiare.

Le tabelle 2, 3, 4, 5 presentano le effemeridi di alcune binarie per le quali è possibile condurre un'indagine con i metodi descritti.

TAV. 6

	a	e	i	P (anni)	Par Trigon.	Massa (masse sol)	Calcolatore
70 OPH	4".551	0.500	121°.11	87.85	0".199	1.55	K. Aa. Strand 1952
ZETA HER	1".369	0.470	131°.40	34.38	0.105	1.85	P. Baize 1949
CSI BOO	4".884	0.506	140°.34	149.95	0.147	1.63	K. Aa. Strand 1937
GAMMA VIR	3".746	0.877	148°.33	171.76	0.089	2.48	H. Wolf 1949
CSI UMA	2".536	0.414	122°.65	59.84	0.124	2.0	W.D. Heintz 1966

In tab. 6 sono elencati i valori correnti in letteratura di semiasse maggiore, periodo, inclinazione, eccentricità, parallasse e massa delle binarie proposte.

RICONOSCIMENTI

Questo lavoro è stato realizzato nell'ambito della Sessione di Lavoro per un Insegnamento Moderno della Fisica promossa dalla Sezione di Mantova dell'Associazione per l'Insegnamento della Fisica nell'anno scolastico 1974-75.

Ringrazio i proff. C. Bartolini e G. Battistini dell'Osservatorio Astronomico dell'Università di Bologna per i preziosi consigli e le indicazioni bibliografiche.

L'apparecchiatura per la proiezione dell'orbita apparente è stata realizzata dalla

ditta Pallestrini e Casari di Settimo Milanese (MI).

RIFERIMENTI

- [1] G. Holton, Introduction to Concepts and Theories in Physical Sciences, Addison-Wesley Publ. Co., Reading, Mass., 1973.
- [2] R.G. Aitken, The Binary Stars, Dover, New York, 1963.
- [3] W.M. Smart, Spherical Astronomy, Cambridge University Press, London, 1931.
- [4] B.A. Vorontsov et al., Physics of Stars and Stellar Systems, I.P.S.T., Jerusalem, 1969.
- [5] M.G.J. Minnaert, Practical Work in Elementary Astronomy, D. Reidel Publ. Co., Dordrecht, Holland, 1969.

Questo articolo, già apparso sul «Giornale di Astronomia», viene pubblicato per gentile concessione della Società Astronomica Italiana.