

# LA DISTANZA DEGLI ASTRALI: come si può misurare, che cosa si trova

## 1. Introduzione

La conoscenza delle distanze degli astri è argomento che attraversa la storia dell'Astronomia fin dai tempi più antichi. Il progresso scientifico e soprattutto lo sviluppo tecnologico dell'ultimo secolo hanno rivoluzionato l'osservazione e la descrizione del cielo stellato a tal punto che lo stesso concetto di distanza ha subito un'evoluzione.

Più che un discorso organico sui vari modi usati dagli astronomi per misurare le distanze degli oggetti celesti, argomento vastissimo, mi limiterò a presentarvi alcune delle tecniche più importanti che sono state utilizzate in passato, e lo sono tuttora, per determinare quanto sono lontani gli astri che osserviamo, a occhio nudo o con strumenti più o meno potenti, e quanto profondo è il cielo che ci circonda.

## 2. Qualche distanza nel nostro Sistema Solare

a) dimensioni della Terra: Eratostene, 225 a.C.

$$R_T \approx 6270 \text{ km} \quad (\langle R_T \rangle = 6380 \text{ km})$$

b) distanza della Luna dalla Terra: Ipparco, 130 a.C.

$$d_{TL} \approx 60 R_T \quad (\langle d_{TL} \rangle = 382\,000 \text{ km} = 59,9 R_T)$$

c) distanze dei pianeti dal Sole mediante la legge di Keplero  $r^3/T^2 = 1$ , nella ipotesi di orbite circolari con  $r_T = 1 \text{ UA}$  (unità astronomica) e  $T_T = 1 \text{ anno}$ : la tabella seguente è presa dai "*Principia*" di Newton, 1687 d.C.

PIANETA	T (anni)	r (UA)	<r> (UA)	<r> (10 <sup>6</sup> km)
Mercurio	0,241	0,387	0,386	57,9
Venere	0,615	0,723	0,720	108
Terra	1,000	1,000	1,000	150
Marte	1,88	1,52	1,52	228
Giove	11,9	5,20	5,19	778
Saturno	29,5	9,54	9,53	1430

d) distanza del Sole dalla Terra: Cassini – Richer, 1672

$$d_{TS} \approx 22\,000 R_T \approx 140 \cdot 10^6 \text{ km} \quad (\langle d_{TS} \rangle = 150 \cdot 10^6 \text{ km} = 1 \text{ UA})$$

La distanza in chilometri Terra – Sole misurata da Cassini e Richer è importante perché permette di sapere a quanti km corrisponde il valore dell'unità astronomica (UA). La misurazione è stata effettuata con un procedimento trigonometrico molto noto, conosciuto anche con il termine 'triangolazione'. Per la sua importanza, non solo in astronomia, gli dedicheremo un po' di tempo.

### 3. La triangolazione

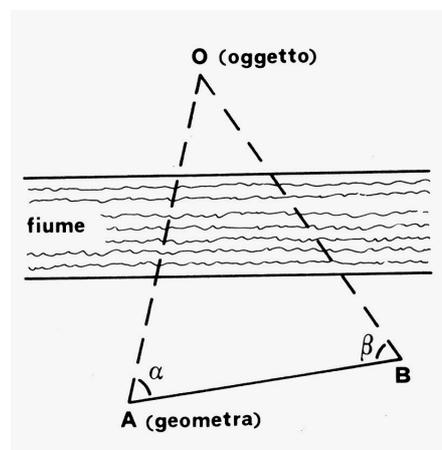
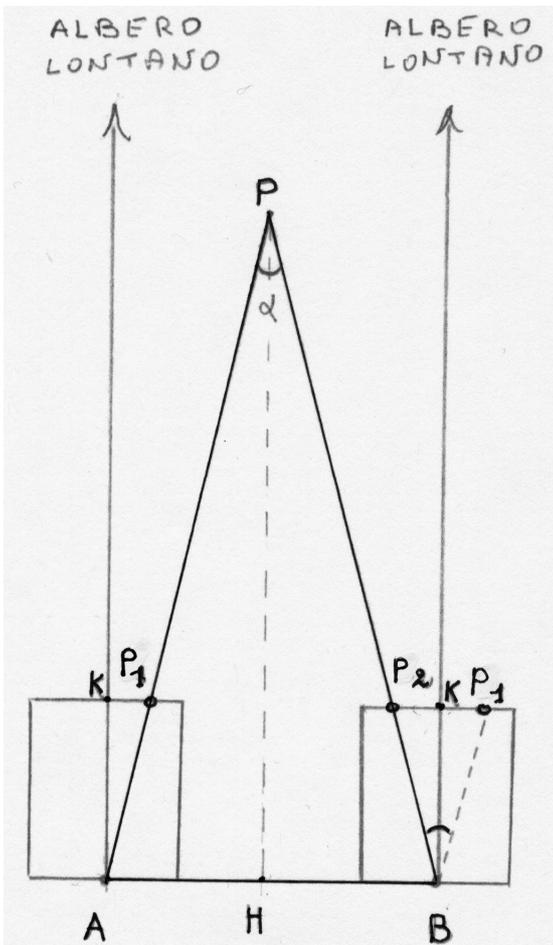


Fig. 1

La figura accanto serve a illustrare il problema seguente: un geometra nel punto A deve misurare la distanza dello oggetto O. Egli è fornito di cordella metrica, ma c'è il fiume di mezzo e vorrebbe evitare di attraversarlo. Conoscendo la geometria e le proprietà dei triangoli, il tecnico immagina di costruire un grande triangolo ABO con un vertice in corrispondenza

dell'oggetto al di là del fiume, ma con la base AB sulla riva dalla propria parte. Egli sa che, conoscendo la lunghezza del lato AB, l'angolo α (che indica la direzione lungo la quale egli vede l'oggetto quando si



**Fig. 2**

trova all'estremo A), e l'angolo  $\beta$  (che indica l'analoga direzione quando si trova all'altro estremo B), è in grado di calcolare gli altri elementi del triangolo, in particolare la lunghezza AO che cercava. Allora misura la lunghezza della base AB con la cordella metrica e i due angoli  $\alpha$  e  $\beta$  con uno speciale goniometro per raggiungere il suo scopo.

Il procedimento adottato dal geometra si chiama 'triangolazione' e penso sia chiaro a tutti il motivo di questo nome.

Anche in questa sede possiamo fare una misurazione di distanza con tale metodo: per esempio possiamo determinare la distanza della porta d'ingresso da qui dove mi trovo, senza attraversare la sala.

Useremo una cordella metrica e un piccolo apparecchio che ho costruito con una vaschetta di cartone che conteneva tagliatelle all'uovo. Esso ci servirà per individuare le direzioni di osservazione dell'oggetto (la porta) dagli estremi della nostra base, che dovremo stabilire.

Come mostra la figura 2, anche noi immaginiamo un grande triangolo con un vertice in corrispondenza della porta, ma ne costruiamo anche uno piccolo sulla vaschetta, del tutto simile al precedente e avente caratteristiche note. In pratica, esso ci fornisce le misure degli angoli associati alle direzioni di osservazione, dato

che non disponiamo dello speciale goniometro usato dal geometra, ma semplicemente di un apparecchio fatto con la vaschetta delle tagliatelle.

L'apparecchio funziona bene, nel senso che ci fornisce effettivamente le direzioni di osservazione della porta dagli estremi A e B della base, se abbiamo l'avvertenza di spostarlo

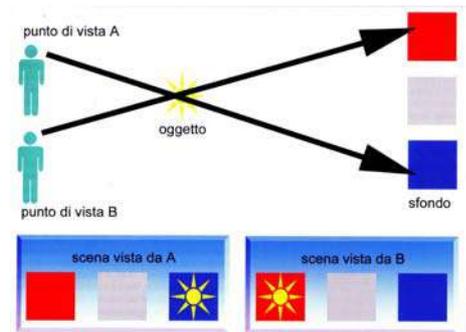
$$\frac{HP}{AB} = \frac{KB}{P_1 P_2}$$

$$HP = \frac{AB}{P_1 P_2} \cdot KB$$

$$\overline{KB} = 27,2 \text{ cm}$$

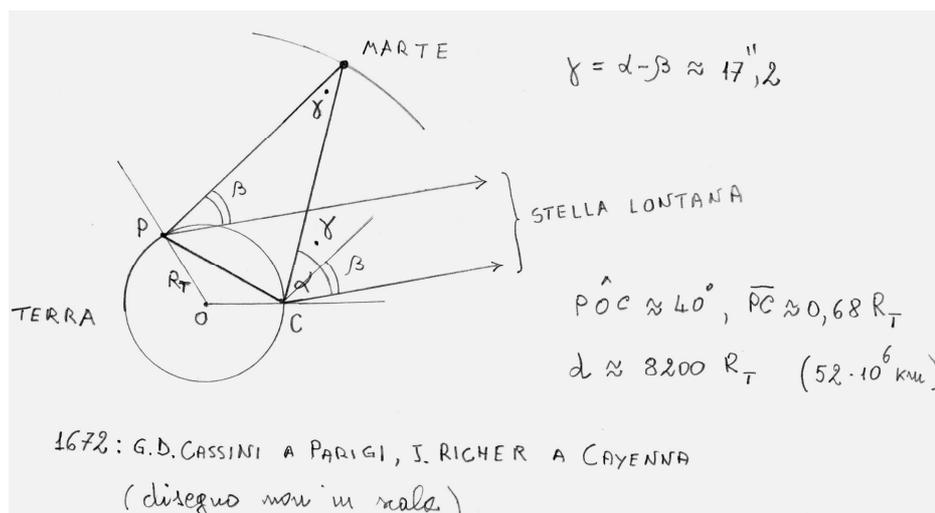
da A a B senza farlo ruotare su se stesso. Va traslato senza modificarne l'orientamento. Il confronto fra i due triangoli APB e P<sub>1</sub>BP<sub>2</sub> fornisce una relazione di proporzionalità che permette di ottenere l'espressione dell'altezza HP che rappresenta la distanza della porta. Il segmento KB = 27,2 cm rappresenta la lunghezza della vaschetta.

Vedremo ora come il metodo della triangolazione venga sfruttato in astronomia. Prima abbiamo parlato della distanza Terra – Sole espressa in chilometri, dopo le misurazioni di Cassini e Richer. Quale triangolazione hanno impostato? Cercherò di spiegarlo con le figure seguenti. La figura 3 mostra lo spostamento apparente su uno sfondo lontano di un oggetto più vicino quando lo si osserva da due diversi punti di vista.



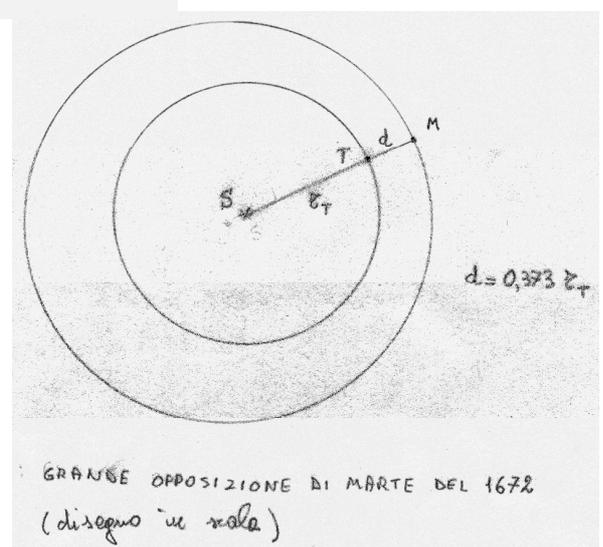
**Fig. 3**

Cassini e Richer hanno misurato lo spostamento di Marte rispetto a una stella lontana osservandolo da due punti lontani della superficie terrestre.



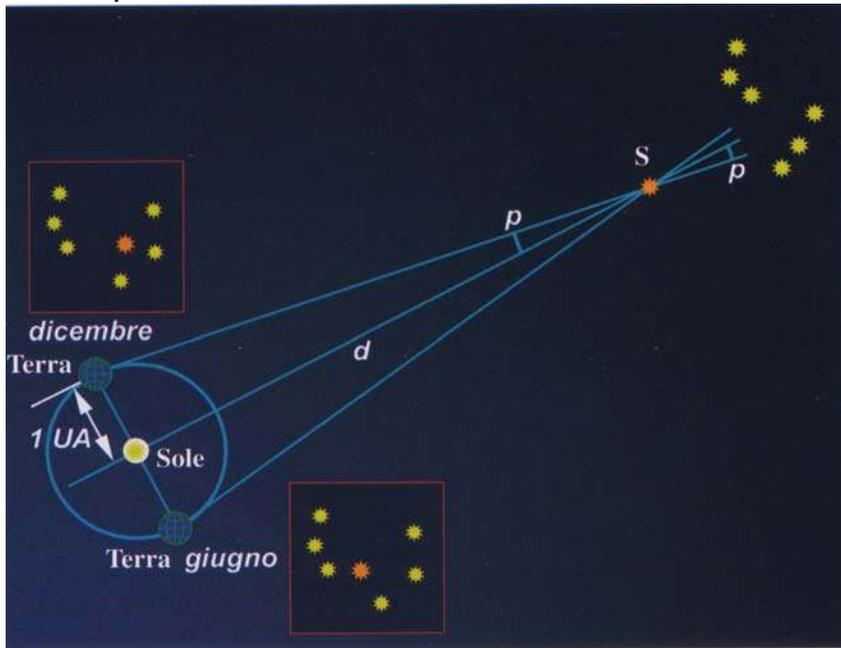
**Fig. 4: misurazione della distanza di Marte dalla Terra nella grande opposizione del 1672**

**Fig. 5: le orbite della Terra e di Marte nel momento dell'opposizione. Si noti l'eccentricità dell'orbita di Marte.**



Fin qui le misurazioni entro il sistema solare

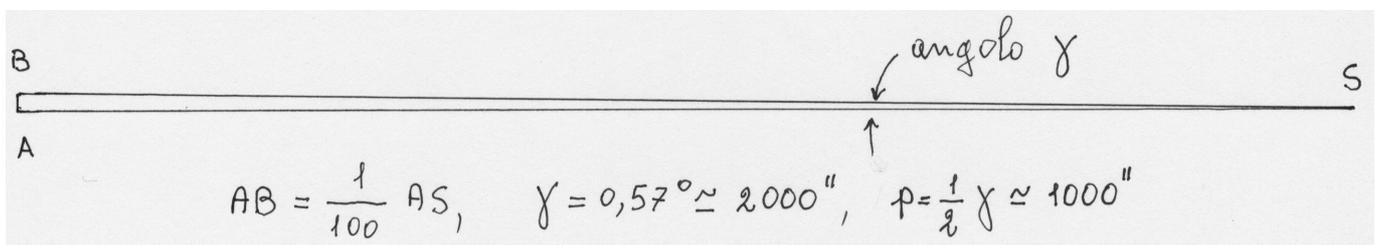
Per le stelle il metodo della triangolazione può andare bene, a patto di trovare una base molto grande. Le dimensioni della Terra sono insufficienti per riuscire a misurare l'angolo  $\gamma$  di una stella. Sarebbe come se noi avessimo usato una base di qualche millimetro per misurare la distanza della porta. La base più grande di cui disponiamo è il diametro dell'orbita terrestre.



La figura 6 mostra come sia possibile valutare la distanza di una stella con il metodo della triangolazione. Quando, come nella figura, il triangolo è isoscele l'angolo  $p$ , che ha il vertice nella stella e sottende il raggio della orbita terrestre, si chiama *parallasse*.

**Fig. 6**

Se  $p = 1'' = 1/3600$ , risulterebbe  $d = 206\,265 \text{ UA} = 1 \text{ parsec} = 3,26 \text{ al}$ . Nessuna stella si trova a tale distanza o più vicina. Tutti gli astri al di fuori del sistema solare hanno distanze maggiori.



**Fig. 7**

Il triangolo lungo e sottile ci serve per farci un'idea di quali triangolazioni debbano fare gli astronomi per misurare le distanze delle stelle più vicine. La base AB è 2 mm e l'altezza 200 mm, per cui l'angolo  $\gamma$  è circa  $\frac{1}{2}$  grado e l'angolo di parallasse  $p$  la metà, equivalente a poco più di  $1000''$ . Volendo rendere il triangolo

ASB simile a quelli delle misurazioni astronomiche con  $p = 1''$ , mantenendo fissa la base AB a 2 mm, dovremmo moltiplicare l'altezza AS per 1000. Il triangolo con la base di 2 mm diventerebbe alto 200 metri!

Il primo astronomo che riuscì a fare una triangolazione del genere è stato Bessel nel 1832, che ha misurato la distanza della stella 61 Cygni, trovando  $p = 0,33''$  e quindi  $d = 3 \text{ parsec} \approx 10 \text{ al}$  (oggi  $d = 3,4 \text{ pc} = 11,37 \text{ al}$ ). La stella più vicina al nostro Sole è Proxima Centauri, per la quale  $p = 0,76''$  e  $d = 1,3 \text{ pc} = 4,24 \text{ al}$ . La tabella seguente riporta le distanze di una decina di stelle fra le più vicine a noi.

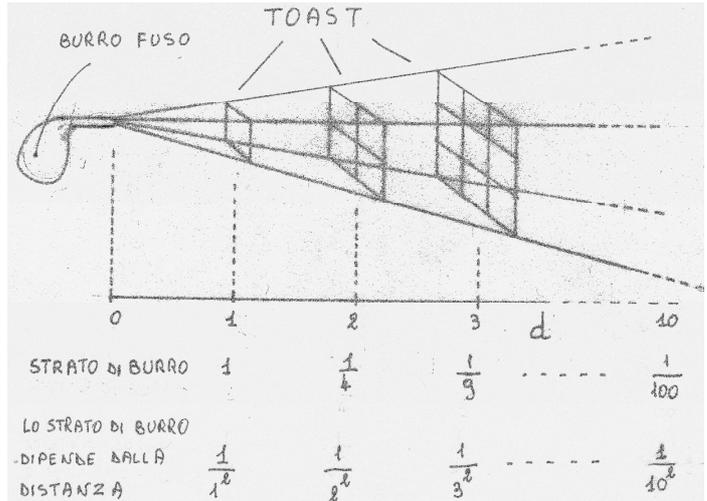
<b>Tabella 1</b>	STELLA	distanza (al)
	Alfa Centauri	4,35
	Stella di Barnard	5,98
	Sirio	8,55
	Procione	11,38
	Altair	16,3
	Vega	24,4
	Arturo	33,6
	Polluce	34,5
	Castore	48,9

Con il metodo della triangolazione che ho descritto ci si può spingere oggi fino a circa  $200 \text{ pc} \approx 650 \text{ al}$  con misurazioni fatte al suolo. Oltre è praticamente impossibile. Ritornando al sottile triangolo di prima, con la base di 2 mm: adesso sarebbe alto 40 km!

Utilizzando i satelliti artificiali si possono avere risultati migliori, soprattutto si fanno misurazioni più accurate (Hipparcos, Gaia), ma per misurare le distanze di stelle più lontane bisogna ricorrere ad altri metodi.

#### 4. La legge dell'inverso del quadrato e il metodo del confronto

E' il momento di presentarvi una legge molto importante in fisica che riguarda ogni cosa che si propaghi in linea retta, come la luce nell'aria limpida e nello spazio cosmico. Vi racconterò la storiella del Prof. Rogers raccontata nel film "La legge di Coulomb".

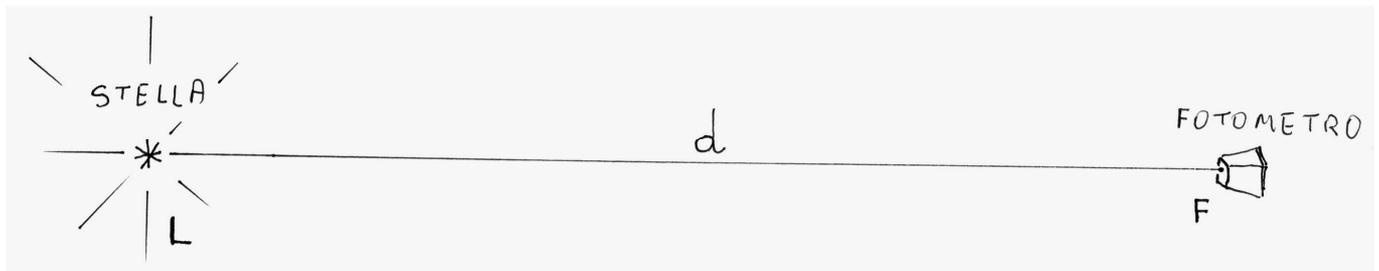


**Fig. 8**

Un ristorante ha il problema di imburrare i toast e vuole farlo in modo moderno. Così inventano un 'cannone a burro' che spruzza il burro fuso sui toast posti a diverse distanze. A distanza ravvicinata il burro si deposita su un solo toast, ma a distanza doppia si sparge su quattro toast, a distanza tripla su nove toast e a una distanza dieci volte più grande addirittura su cento toast. Tuttavia, poiché la quantità di burro sparata ogni volta è sempre la stessa, all'aumentare della distanza diminuisce lo strato di burro che si deposita sui toast. Così, a distanza doppia si ridurrà a un quarto, a distanza tripla si ridurrà a un nono e a dieci volte di distanza si ridurrà a un centesimo. Lo strato di burro  $s$  quindi è dato dalla quantità di burro fuso spruzzata  $BF_{SPR}$  divisa per il quadrato della distanza  $d^2$ . In forma matematica si scrive così:

$$s = BF_{SPR} / d^2 \quad (1)$$

Per il gestore del ristorante la formula (1) è molto comoda perché, conoscendo quanto burro fuso viene spruzzato a ogni colpo, essa gli permette di sapere a quale distanza deve disporre i toast per avere su di essi lo strato di burro stabilito.



**Fig. 9**

Nel caso della luce che ci proviene da una stella si ha una situazione molto simile. La stella emette radiazione in tutte le direzioni con una certa potenza: è la sua luminosità, indicata con **L** ed espressa in watt.

Una piccola quantità di questa radiazione arriva fino alla nostra Terra e viene misurata per mezzo di un fotometro: è lo splendore apparente, indicato con **S** e misurato in lux.

Tra **L** ed **S** intercorre una relazione analoga alla (1):

$$\mathbf{S} = k \mathbf{L} / \mathbf{d}^2 \quad (2)$$

dove **k** è una costante, un numero fisso noto che non si può eliminare, ma non disturba il nostro ragionamento. Come per il gestore del ristorante, anche qui un astronomo che conosca lo splendore apparente **S** di una stella può ricavarne la distanza **d** se conosce la sua luminosità **L**. Oppure, può dedurre la luminosità della stella se conosce quanta luce arriva al fotometro e ha misurato la distanza dell'astro mediante triangolazione.

E' così infatti che sono state ottenute le luminosità del Sole e di molte stelle vicine. La tabella seguente è un'estensione della precedente perché, oltre alle distanze, riporta anche le luminosità di nove stelle vicine rapportate alla luminosità del Sole.

<b>Tabella 2</b>	STELLA	distanza (al)	luminosità (Sole = 1)
	Alfa Centauri	4,35	1,4
	Stella di Barnard	5,98	0,0004
	Sirio	8,55	23
	Procione	11,38	6,6
	Altair	16,3	10
	Vega	24,4	47
	Arturo	33,6	94
	Polluce	34,5	34
	Castore	48,9	44

Il Sole irradia una potenza di  $4 \cdot 10^{26}$  W (400 milioni di miliardi di miliardi di watt).

Così, con la legge dell'inverso del quadrato della distanza, il problema di determinare  $d$  è ricondotto a quello di conoscere  $L$ .

Sono stati adottati vari procedimenti più o meno efficaci.

Per esempio, consideriamo una stella della tabella 2, della quale si conosce la luminosità per le ragioni dette prima. Analizzando la luce dell'astro con uno spettroscopio si ottiene lo spettro stellare, con i colori dell'iride solcati da molte righe scure (vedi Appendice): lo spettro costituisce la carta d'identità della stella.

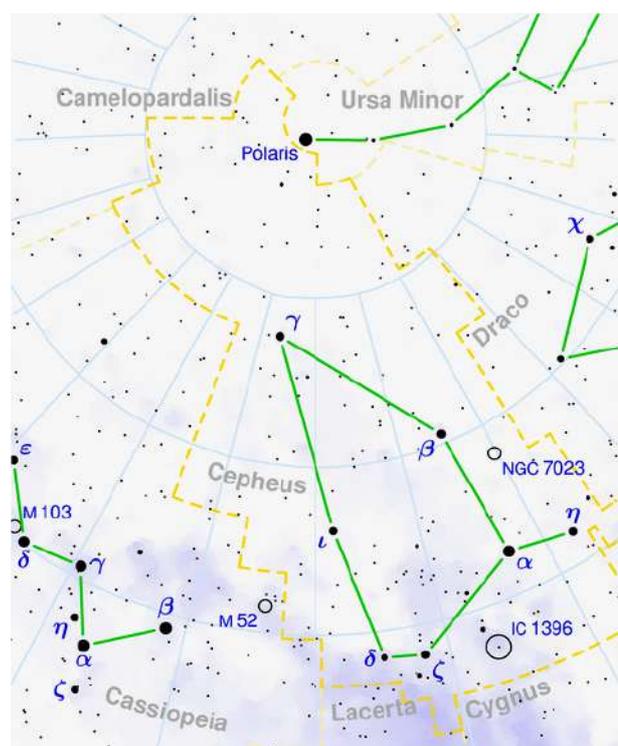
Supponiamo, osservando un'altra stella, di scoprire che il suo spettro è praticamente uguale a quello della stella precedente: la stessa carta d'identità. E' ragionevole pensare che le due stelle siano più o meno uguali e quindi abbiano la stessa luminosità  $L$ . Allora è possibile dedurre la distanza della seconda stella dopo averne misurato lo splendore apparente con un fotometro.

Tale metodo non è molto preciso, ma permette di ricavare informazioni su stelle più lontane. Tuttavia presenta un inconveniente che non si verifica con la triangolazione: se lungo il percorso fra l'astro e la Terra si trovano nubi di polveri e gas interstellari, nell'attraversarle la luce verrà in parte assorbita e lo splendore

apparente misurato dal fotometro risulterà più debole del dovuto, alterando la misura della distanza. Ma gli astronomi sono riusciti, in molti casi, a superare anche questa difficoltà valutando l'entità dell'assorbimento interstellare attraverso una speciale analisi dello spettro della stella. Ciò consente loro di apportare le necessarie correzioni e di trovare un valore accettabile della distanza dell'astro.

Esistono tuttavia stelle particolari, per le quali la luminosità si può determinare con una certa accuratezza: le *Cefeidi*.

## 5. Le Cefeidi e gli indicatori di distanza



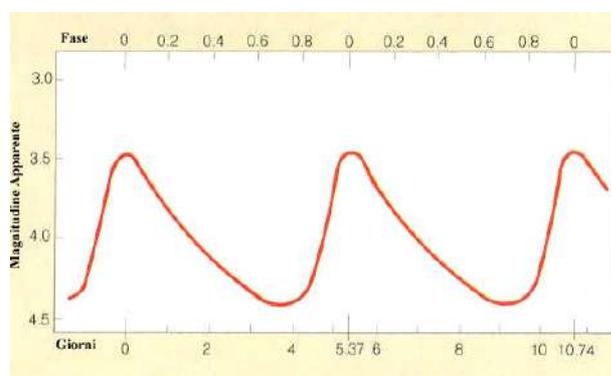
**Fig. 10**

Il grafico di figura 11 mostra l'andamento regolare dello splendore apparente registrato da un fotometro. Lo splendore apparente della stella non è espresso in lux, perché è stata utilizzata la scala delle *magnitudini apparenti* molto usata in astronomia, ma il significato è lo stesso

Il periodo, cioè la durata di una oscillazione della luminosità, risulta di 5,37 giorni.

E' noto fin dai tempi di Galileo che vi sono astri in cielo la cui luminosità varia in modo più o meno regolare: sono chiamati stelle variabili.

Le Cefeidi costituiscono una famiglia di stelle variabili un po' speciale: la loro luminosità varia in modo periodico. Esse prendono il nome dalla  $\delta$  Cephei (vedi figura 10), una stella scoperta nel 1784 da J. Goodricke che ne osservò per primo le variazioni di splendore, periodiche e asimmetriche.



**Fig. 11**

Nel 1911 l'astronoma americana Henrietta Leavitt fece una grande scoperta. Osservando diverse Cefeidi nella Piccola Nube di Magellano, si accorse che c'era una relazione precisa fra la durata di un'oscillazione dello splendore apparente e la potenza media dell'astro. Misurando allora l'intervallo di tempo fra due massimi, per esempio, è possibile risalire alla luminosità  $L$  della stella e quindi ricavarne la distanza  $d$  sfruttando la relazione (2). L'importanza della scoperta consiste proprio nel fatto che, una volta individuata una cefeide sulla volta celeste, è assicurata la possibilità di misurarne la distanza.

Nel caso di  $\delta$  Cephei, la luminosità risulta 2000 volte quella del Sole e la distanza 960 al. Controllata recentemente dal telescopio spaziale Hubble, mediante triangolazione, la distanza di  $\delta$  Cephei è risultata 891 al.

Poiché le cefeidi sono astri luminosissimi, migliaia o decine di migliaia di volte più luminose del nostro Sole, quando una di esse viene osservata entro un ammasso stellare o in un'altra galassia, la distanza della stella variabile fornisce, in buona sostanza, la distanza dell'ammasso o della galassia. Per tale motivo le Cefeidi sono considerate degli importantissimi *indicatori di distanza* nell'universo.

Con il metodo basato sulle Cefeidi è possibile misurare, al suolo, distanze molto maggiori di quelle dedotte con la triangolazione. Si arriva fino a circa  $4 \text{ Mpc} \approx \approx 10 \text{ Mal}$ .

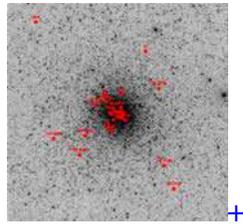
Le figure seguenti 12 a) e b), 13, 14 fanno parte di un progetto di ricerca di alcuni astronomi italiani dell'Osservatorio Astronomico di Capodimonte per la determinazione della distanza dell'ammasso NGC 1866 nella Grande Nube di Magellano ( $d \approx 0,18 \text{ Mal}$ ).

**Stima della distanza dell'ammasso NGC1866 nella Grande Nube di Magellano, con dati sia ottici sia nel vicino infrarosso, di Cefeidi Classiche**



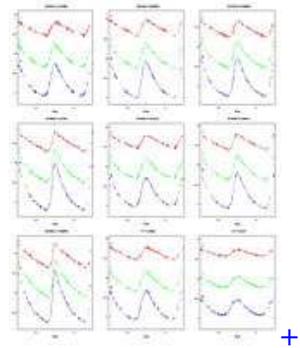
*Immagine in tricromia dell'ammasso NGC1866 osservato nelle bande BVI utilizzando il telescopio VLT@ESO*

**Fig. 12 a)**



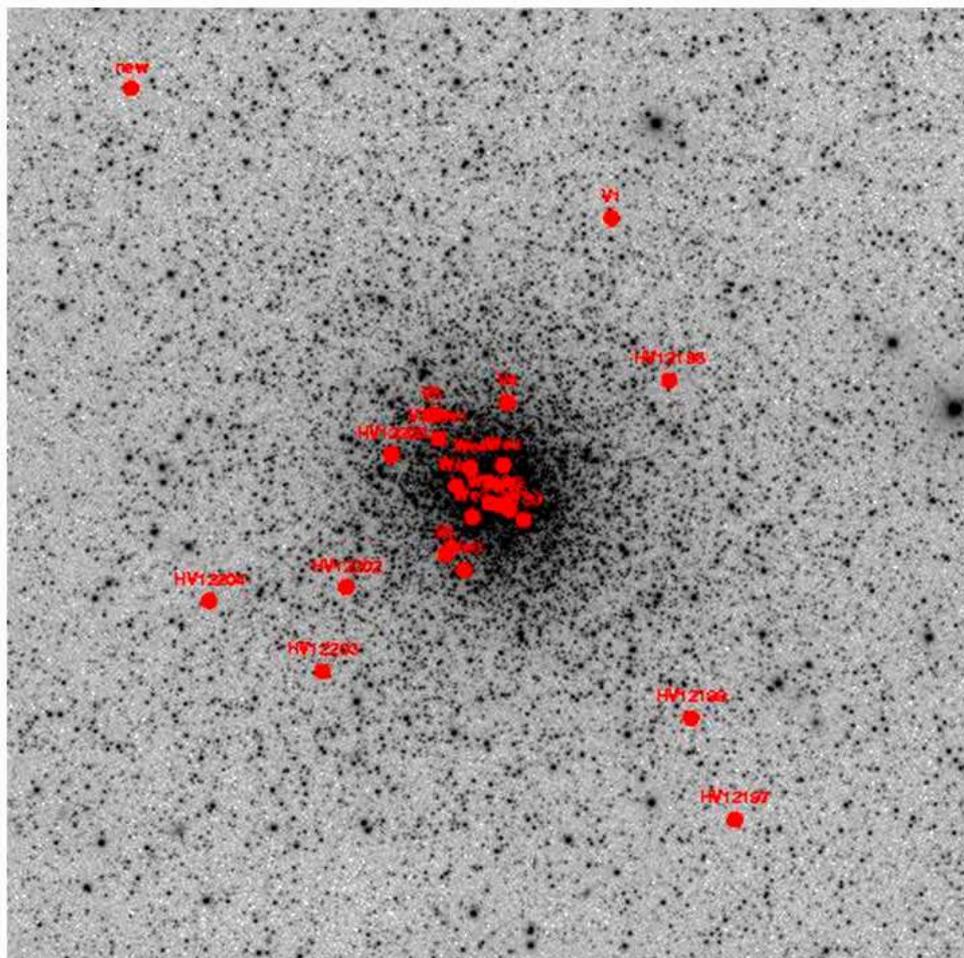
*Immagine dell'ammasso NGC1866 con la posizione delle Cefeidi studiate. New indica una nuova Cefeidi scoperta in questa ricerca*

**Fig. 12 b)**



*Curve di luce nelle bande BVI di alcune delle Cefeidi di NGC1866*

**Fig. 13**



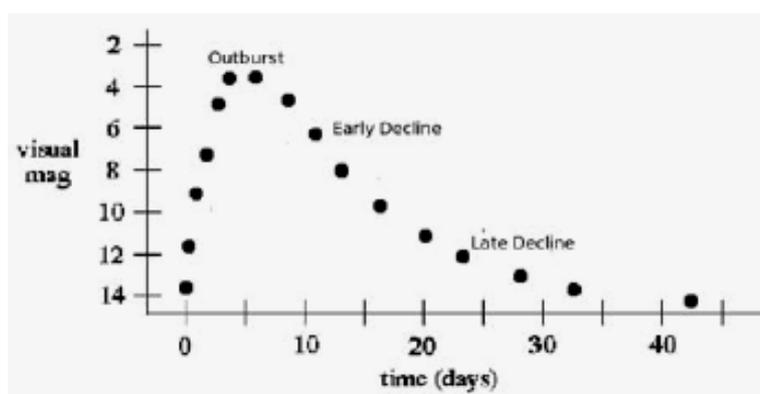
**Fig. 14**

E' stato proprio con questo metodo che negli anni '20 del secolo scorso l'astronomo americano E. Hubble, riuscendo a individuare delle Cefeidi nelle galassie vicine alla nostra, riuscì a misurarne la distanza (dell'ordine dei Mal) e a scoprire che esse si allontanano da noi, cioè dalla nostra galassia, con velocità tanto maggiore quanto più esse sono lontane (legge di Hubble). E così si rese conto che l'Universo non è statico, ma si espande. Torneremo più avanti su questo punto.

Prima però devo precisare che le Cefeidi non costituiscono l'unico indicatore di distanza nell'universo.

Per spingersi oltre i 10 Mal occorrono indicatori di maggiore potenza, che siano osservabili anche a distanze alle quali le Cefeidi non sono più visibili. Tali indicatori sono le stelle variabili esplosive, che brillano all'improvviso con grandissima luminosità. Il loro splendore sale rapidamente fino a raggiungere un massimo e poi lentamente diminuisce per giorni o mesi. Si tratta delle *Novae* e delle *Supernovae*. Le curve di luce associate all'esplosione hanno caratteristiche tali da consentire di dedurre la luminosità  $L$  della stella nel momento esplosivo, per cui dall'osservazione di una *Nova*, o di una *Supernova*, si può risalire alla sua distanza, come si fa con le Cefeidi.

Il grafico di figura 15 mostra come varia nel tempo lo splendore apparente di una nova, misurato da un fotometro. Al momento della esplosione le Novae



raggiungono una luminosità da  $10^4$  a  $10^5$  volte quella del Sole. Utilizzate come indicatori di distanza, esse consentono di spingersi fino a circa 40 Mpc  $\approx$  100 Mal.

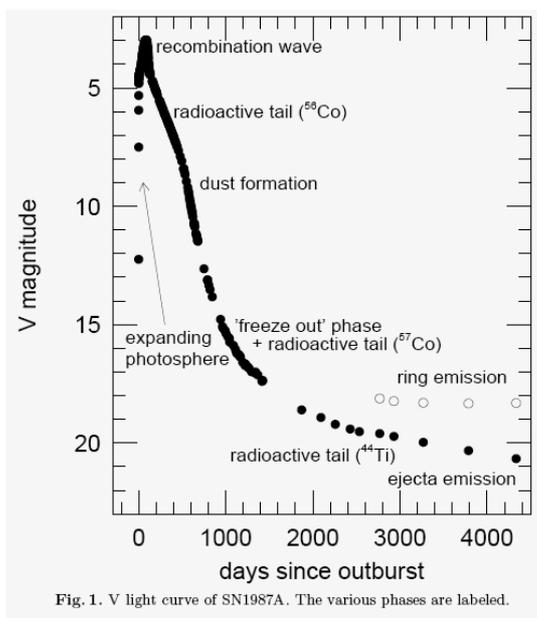
**Fig. 15**

L'immagine di figura 16 mostra una nova osservata nella galassia a spirale M 81, nella costellazione dell'Orsa Maggiore, alla distanza di 3,6 Mpc  $\approx$  12 Mal.

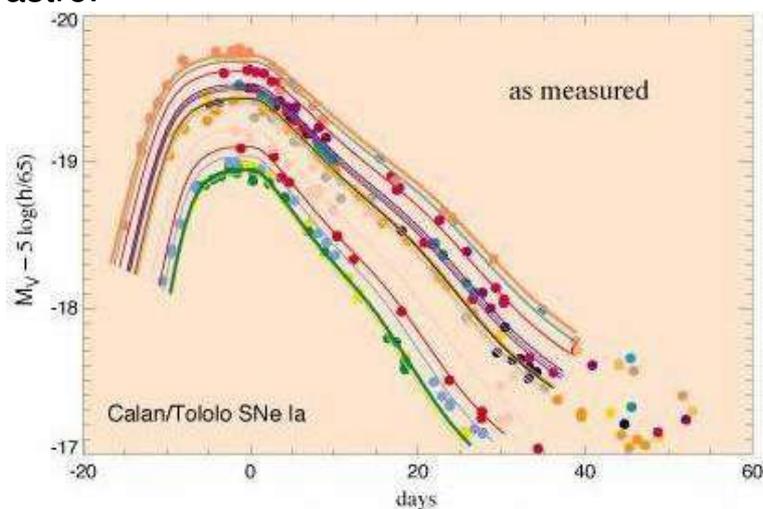


**Fig. 16**

La luminosità delle Supernove è circa diecimila volte più grande di quella delle Novae. Ciò è sostanzialmente dovuto al fatto che l'esplosione coinvolge l'intero corpo della stella, a differenza delle Novae, dove l'esplosione interessa solo gli strati superficiali dell'astro.



**Fig. 17**



**Fig. 18**

La figura 17 mostra l'andamento dello splendore apparente della Supernova esplosa nella Grande Nube di Magellano nel 1987, dal momento dell'esplosione fino a oltre dieci anni dopo. La figura 18 riporta una decina di curve di luce di Supernovae tipo Ia su un intervallo di tempo di un paio di mesi, in corrispondenza della fase di più intensa luminosità. Tali Supernovae sono molto utilizzate come indicatori e consentono di misurare distanze dell'ordine dei miliardi di anni luce (Gal).



**Fig. 19**

La figura 19 mostra l'immagine di una Supernova tipo Ia ripresa nei pressi della galassia ESO 269 – IG 020 nella costellazione del Centauro il 15 dicembre 2008. La galassia è distante 126 Mpc  $\approx$  400 Mal.

Il fatto interessante è che la Supernova sia stata scoperta dall'astrofilo Alessandro Dimai, di Cortina d'Ampezzo, con il riflettore da 25 cm "GRAS 15" (Global Rent a Scope 15) che si trovava a Moorook in Australia. Lo strumento, comandato a distanza, era stato noleggiato per alcune ore da Cortina.

## 6. Le distanze nell'Universo in espansione

L'effetto Doppler (vedi Appendice) permette di determinare, misurando lo spostamento delle righe nello spettro stellare, la velocità dell'astro: in particolare la velocità con cui si allontana, se le righe risultano spostate verso il rosso (redshift). L'astronomo americano Hubble, che aveva misurato la distanza di diverse galassie vicine per aver individuato in esse la presenza di Cefeidi (grazie al telescopio Hooker da 2,5 m di Monte Wilson, all'epoca il più grande del mondo), sfruttando l'effetto Doppler poté anche misurare la loro velocità, trovando che le galassie si allontanavano e tanto più rapidamente quanto più erano lontane. Fu così in grado di formulare la legge che porta il suo nome ( $v = H \cdot d$ ) e da quel momento risultò evidente che l'Universo non poteva essere statico e immobile, come si era sempre pensato, ma si andava espandendo.

Ciò accadeva nel 1929. Nei successivi ottant'anni la scienza e la tecnologia hanno avuto un grande sviluppo, le osservazioni e le misurazioni astronomiche sono diventate molto accurate e i risultati ottenuti da Hubble sono stati ampiamente confermati. In particolare, grazie al lancio nello spazio di speciali sonde come COBE e WMAP predisposte allo studio della radiazione cosmica di fondo (CBR), le conoscenze sul nostro Universo si sono molto approfondite.

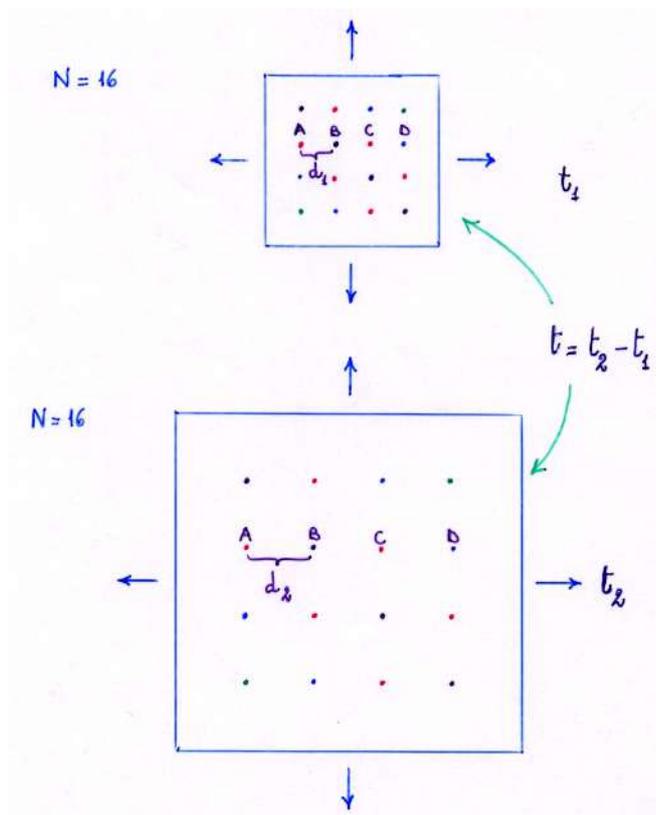
Ho raccontato queste cose qualche anno fa: oggi sappiamo che l'Universo è vecchio di 13,7 miliardi di anni, ha una struttura praticamente euclidea (vale in esso il teorema di Pitagora come nella geometria piana: si dice anche che è piatto e non curvo), si sta espandendo e si espanderà per sempre, l'espansione risulterebbe accelerata. La situazione oggi sembra proprio questa, anche se molti fatti rimangono ancora da spiegare.

Sorge un problema: in un universo in espansione cosa si deve intendere per distanza degli astri, considerando non tanto le stelle più o meno vicine, quanto oggetti molto lontani come le galassie del cielo profondo e i quasar?

Cercherò di spiegare questo concetto non semplice con un esempio e con alcuni disegni.

L'esempio è il seguente. Supponiamo che questa sala rappresenti l'Universo e ogni persona, seduta sulla sua sedia, rappresenti una galassia. Possiamo immaginare l'espansione dell'Universo pensando alla sala che si espande uniformemente in tutte le direzioni. Limitiamoci a considerare solo il pavimento: ciascuno di voi sta fermo sulla sua sedia, ma vede gli altri allontanarsi, anche se rimangono seduti sulle loro sedie. Se dopo un minuto le dimensioni del pavimento sono raddoppiate anche le distanze tra le sedie saranno raddoppiate, quindi ciascuno di voi ha visto in quel minuto raddoppiare la distanza di ogni altra persona. In particolare si è accorto che le persone più lontane si allontanavano con velocità maggiore di quelle più vicine.

Per chiarire questo punto esaminiamo il disegno schematico che ho preparato.



In conclusione, per ogni osservatore le altre persone presenti si allontanano da lui con una velocità che è proporzionale alla loro distanza. Si tratta della legge di Hubble: fu proprio misurando le velocità di allontanamento di una ventina di galassie attorno a noi che egli si rese conto che l'Universo si espande.

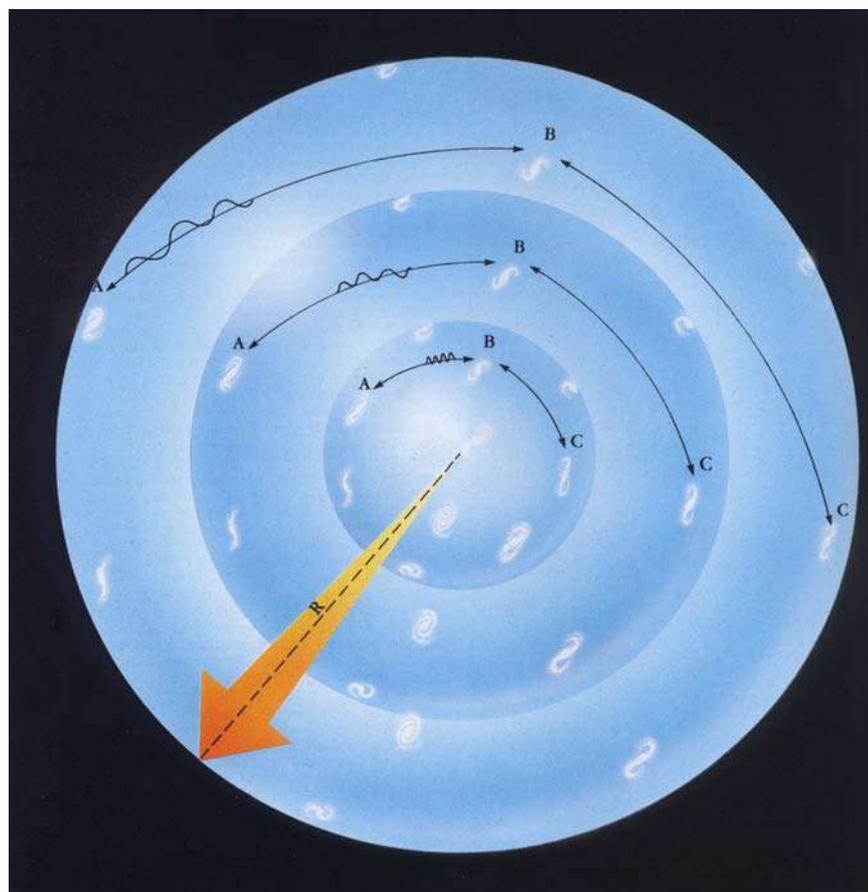
Continuando nell'esempio, immaginiamo che il signor B seduto in prima fila mandi un messaggio al signor A, suo vicino e lo faccia per mezzo di una lumachina ammaestrata che si muova sempre in linea retta con velocità costante, mentre la sala continua a espandersi. Chiamiamo  $t_1$  l'istante in cui la lumachina parte dal signor B e  $t_2$  l'istante in cui arriva al signor A: questi prende la lumachina e decodifica il messaggio per stabilire quanto sia lontano da lui il signor B.

Ma di quale distanza si tratta? Perché, a causa dell'espansione, il signor A si trova di fronte a tre distanze:

- 1 quella tra A e B all'istante  $t_1$ , quando la lumachina è partita da B;
- 2 quella tra A e B all'istante  $t_2$ , quando la lumachina è arrivata ad A;
- 3 quella percorsa dalla lumachina nell'intervallo di tempo  $t = t_2 - t_1$ , mentre la stanza si espandeva sotto di lei.

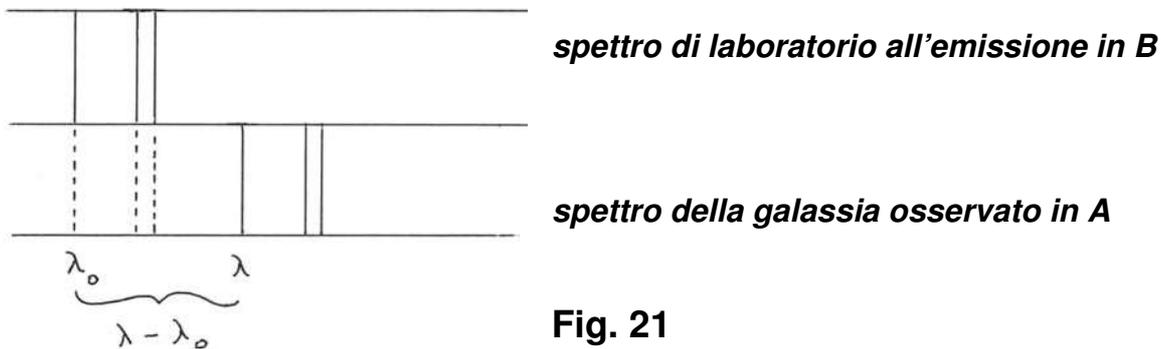
Qualcosa di simile avviene in astronomia o, meglio, in cosmologia visto che ci stiamo occupando dell'intero cosmo. La figura 20 vuole suggerire l'espansione dell'Universo, rappresentandolo però solo con due dimensioni invece di tre. Si tratta di una superficie sferica il cui raggio cresce col passare del tempo.

Le galassie sono i dischetti bianchi che occupano determinate posizioni sulla superficie e che, senza spostarsi, si allontanano fra loro a causa della espansione. Un'onda elettromagnetica, partita dalla galassia B, viaggia verso la galassia A mentre l'universo si espande e, strada facendo, subisce uno stiramento che fa distanziare le sue creste: in altri termini, aumenta la lunghezza d'onda  $\lambda$ . Ciò corrisponde a uno spostamento verso il rosso delle righe dello spettro (*redshift*), che ora non viene più considerato come effetto Doppler, ma come effetto prodotto dall'espansione.



**Fig. 20**

**Righe, per esempio, dell'idrogeno**



**Fig. 21**

$$z = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0}$$

**parametro di redshift**

Il parametro  $z$ , dedotto dall'analisi dello spettro come mostra la figura 21, indica sostanzialmente lo spostamento percentuale della riga a causa dell'espansione.

Un valore piccolo di  $z$  indica un piccolo *redshift*, corrispondente a una bassa (si fa per dire) velocità di allontanamento di una galassia non troppo remota nello spazio e nel tempo. Un grande valore di  $z$ , al contrario, indica un grande *redshift*, corrispondente a una elevata velocità di allontanamento di una galassia molto lontana nello spazio e nel tempo. Il parametro di *redshift* in cosmologia viene utilizzato per indicare quanto remoto è un astro.

Per  $z < 0,01$  ( $< 1\%$ ) l'effetto dell'espansione è ancora molto piccolo e la distanza della galassia al momento della ricezione della luce  $D(t_o)$ , la distanza al momento dell'emissione  $D(t_e)$  e la distanza  $D_{luce}$ , percorsa dalla luce nell'intervallo di tempo  $t_o - t_e$ , sono praticamente coincidenti, come se l'Universo fosse statico. Il

loro valore per  $z = 0,01$  corrisponde a circa 140 Mal.

Per valori di  $z$  più grandi le distanze  $D(t_o)$ ,  $D(t_e)$  e  $D_{luce}$  cominciano a differenziarsi e diventano sempre più diverse quanto più  $z$  cresce.

Anche la formuletta (2), introdotta con la storiella del ristorante che imburrava i toast da lontano, acquista una forma più complessa per tenere conto dell'espansione.

I valori di  $D(t_o)$ ,  $D(t_e)$  e  $D_{luce}$  si possono calcolare per via teorica quando si conosca il valore di  $z$  ottenuto sperimentalmente dall'analisi dello spettro della galassia. Tuttavia essi dipendono dal modello di universo adottato, cioè dalle caratteristiche che vengono attribuite all'Universo in espansione.

La tabella 3 fornisce una serie di dati esplicativi che sono stati ottenuti in base al modello di Universo più accreditato oggi.

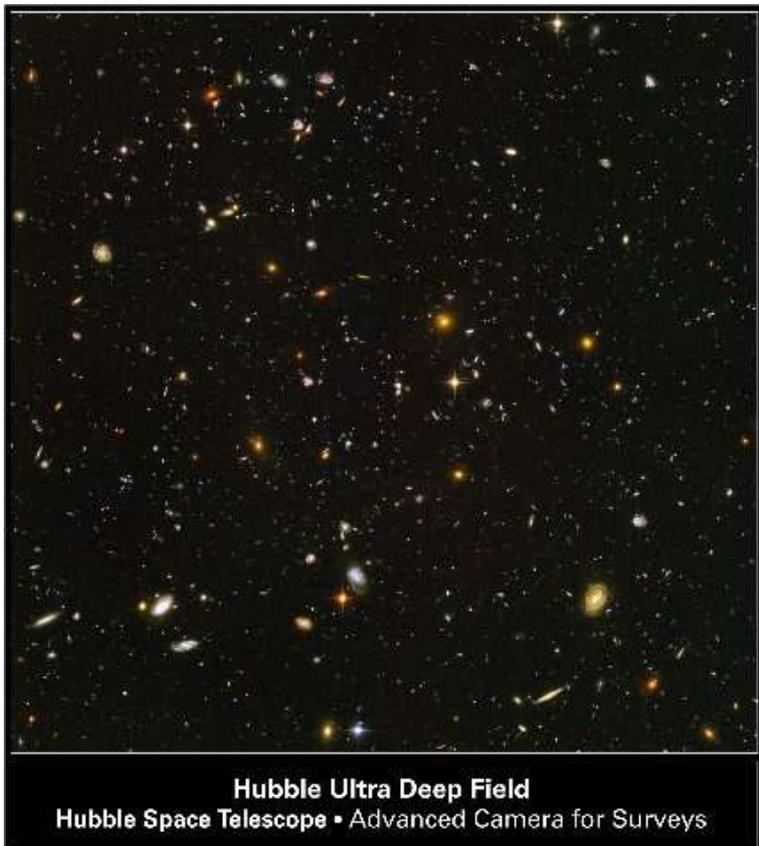
**Tabella 3**

$z$	$D(t_o)$ (Gal)	$D(t_e)$ (Gal)	$t_e$ (Ga)	$v_e$ (c)	$t_o - t_e$ (Ga)	Modello di Universo con
0	0	0	13,7	0	0	
0,1	1,35	1,23	12,46	0,093	1,24	$H_0 = 71$ km/s/Mpc
1,0	10,8	5,41	6,02	0,67	7,68	$\Omega_M = 0,27$
1,625	15,1	5,76	4,06	0,99	9,64	$\Omega_\Lambda = 0,73$
2,0	17,1	5,70	3,35	1,2	10,4	$\Omega_K = 0$
4,0	23,8	4,76	1,58	2,0	12,1	
10	31,5	2,86	0,48	3,9	13,2	
100	42,2	0,42	0,02	16	13,68	
1000	45,8	0,046	0,0006	55	13,7	
$\infty$	47,5	0	0	$\infty$	13,7	

La figura 22 mostra un'immagine dello spazio profondo ottenuta dal telescopio spaziale "Hubble" con 800 pose effettuate durante 400 orbite attorno alla Terra nel periodo dal 24 settembre 2003 al 16 gennaio 2004.

Le dimensioni dell'immagine corrispondono a circa un decimo del diametro della Luna piena, come se si osservasse il cielo guardando attraverso una lunga cannuccia da bibita.

La regione fotografata si trova nella costellazione della Fornace e raccoglie la



luce proveniente da circa diecimila galassie più o meno lontane, di varie età, dimensioni, forme e colori.

Le più piccole e più rosse, circa un centinaio, forse fra le più lontane che si conoscono, esistevano quando l'Universo aveva 800 milioni di anni.

Le più vicine, più grandi, più luminose, a spirale o ellittiche, brillavano circa un miliardo di anni fa, quando l'Universo aveva quasi tredici miliardi di anni.

**Fig. 22**

Si può indicare la loro distanza  $D_{luce}$  moltiplicando la velocità della luce per il tempo che essa ha impiegato per giungere fino a noi. E' il valore che viene fornito di solito anche se adesso, come abbiamo visto, quelle galassie sono più lontane.

## APPENDICE

### A1. L'effetto Doppler

Forse senza conoscerlo per nome, abbiamo sicuramente avuto tutti l'occasione di notare questo fenomeno, quando per la strada abbiamo sentito la sirena di un'autoambulanza, o di un'auto della polizia, mentre ci passava accanto a gran velocità: il suono acuto della sirena che si avvicinava è diventato improvvisamente più grave nel momento in cui l'automezzo ci ha oltrepassato allontanandosi. Lo stesso effetto si avverte, in condizioni analoghe, nelle gare di Formula 1, non più con una sirena, ma con il rumore del motore da corsa quando l'auto è lanciata sul rettilineo della pista.

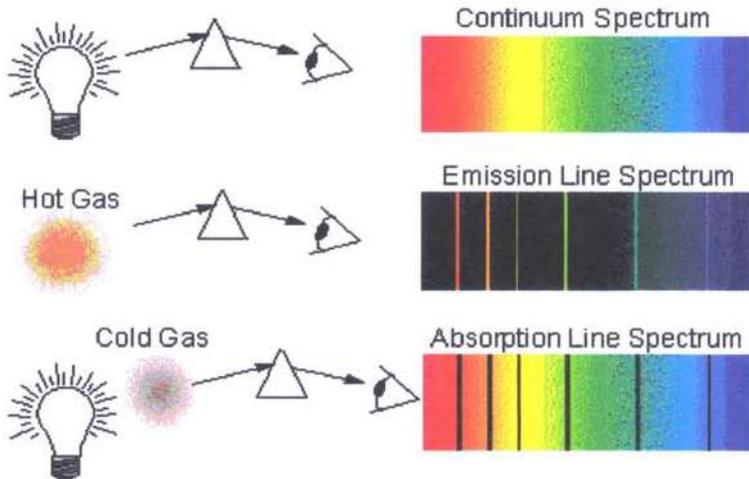
Il salto di acutezza del suono non è altro che una variazione della frequenza percepita dall'osservatore a causa della brusca variazione di velocità della sorgente sonora che, dopo essersi avvicinata, si allontana.

Consideriamo, in particolare, un suono continuo di data frequenza, come potrebbe essere proprio quello di una sirena. Se la sorgente è ferma rispetto a noi, percepiremo il suono così com'è, ma se la sorgente si avvicina la frequenza percepita sarà maggiore e il suono risulterà più acuto con effetto tanto più grande quanto più elevata è la velocità. Il contrario avviene quando la sorgente si allontana, la frequenza percepita è minore e il suono più grave. Naturalmente la frequenza effettiva del suono emesso dalla sorgente è sempre rimasta la stessa.

E' dunque la velocità della sorgente rispetto all'osservatore che rende diversa la frequenza percepita. E se la velocità non rimane costante, ma varia, lo stesso accade alla frequenza e quindi all'acutezza del suono. Ne deriva che, misurando la frequenza di un suono e le sue variazioni, si può utilizzare l'effetto Doppler per ricavare informazioni sulla velocità della sorgente e quindi sul suo moto. Tale effetto è usato anche in medicina per esaminare il flusso sanguigno nel corpo umano, ricorrendo agli ultrasuoni per la loro frequenza elevata. Si può così misurare la velocità con cui il sangue scorre nelle vene e nelle arterie.

## A2. Spettroscopia Doppler

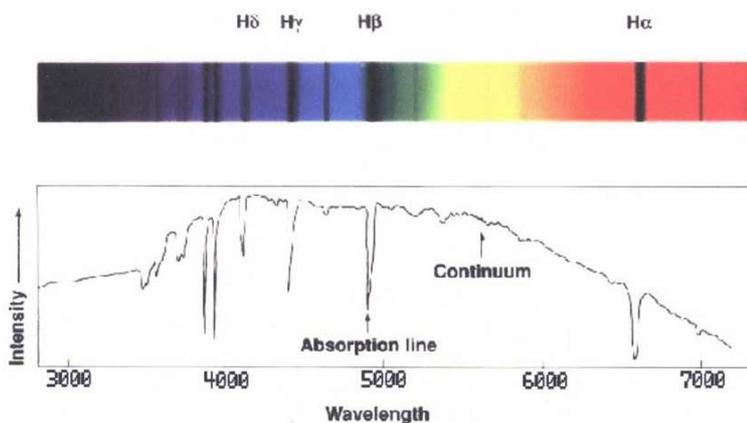
Gli spettri stellari si ottengono facendo passare la luce di una stella attraverso



un dispositivo ottico, come per esempio un prisma, per ottenere la separazione nei colori dell'iride (dispersione della luce). A seconda delle caratteristiche della sorgente di luce lo spettro appare continuo o a righe. Un gas incandescente emette uno

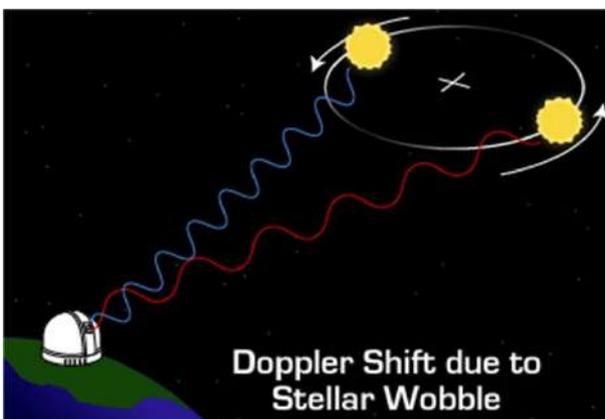
spettro a righe, la cui distribuzione è caratteristica degli elementi che costituiscono il gas. Tuttavia, se il gas è attraversato dalla radiazione emessa da una sorgente luminosa a spettro continuo che gli sta dietro, esso tende ad

assorbire quelle frequenze (quelle righe colorate) che sarebbe portato ad emettere se fosse incandescente, e così lo spettro continuo della sorgente si presenta solcato da righe nere, la cui distribuzione è caratteristica



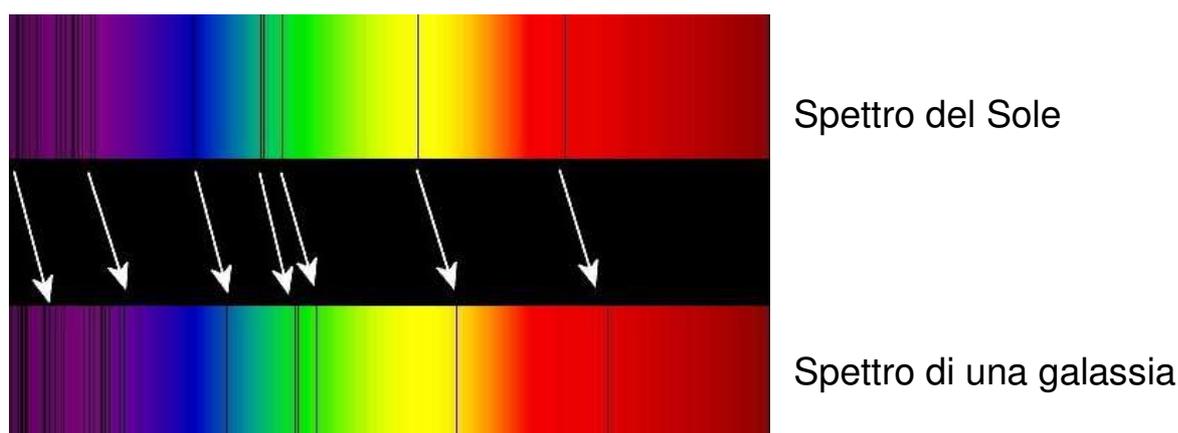
degli elementi che costituiscono il gas. Si chiamano righe di assorbimento. Tutti gli spettri stellari sono solcati dalle righe di assorbimento dovute ai gas che

circondano la stella. Ebbene, se l'astro si allontana o si avvicina a noi, le righe risultano spostate, rispettivamente verso il rosso o verso il violetto, e tanto più quanto maggiore è la velocità con cui si muove la stella (effetto Doppler).



Infatti l'effetto Doppler, essendo un fenomeno tipico delle onde, non si verifica solo in ambito acustico con le onde sonore e gli ultrasuoni, ma anche con le onde elettromagnetiche, in particolare nella banda ottica. Lo si può quindi sfruttare nell'analisi dello spettro della radiazione emessa dagli astri per ottenere informazioni sul loro moto.

Le righe spettrali corrispondono a ben determinate frequenze della radiazione elettromagnetica emessa dalle stelle e uno spostamento delle righe, rispetto alla loro posizione originaria, indica chiaramente una variazione di frequenza. Poiché i valori delle frequenze nello spettro aumentano andando dal rosso al violetto, uno spostamento delle righe verso il violetto indica un aumento di frequenza, mentre uno spostamento verso il rosso indica una diminuzione.



Analogamente a quanto avviene con le onde sonore, le variazioni di frequenza della radiazione elettromagnetica permettono di risalire alla velocità della sorgente e così gli spostamenti delle righe spettrali di un astro forniscono informazioni sulla sua velocità: in particolare uno spostamento verso il rosso (redshift) indica che l'astro si sta allontanando, e tanto più velocemente quanto più lo spostamento è elevato.

## RIFERIMENTI

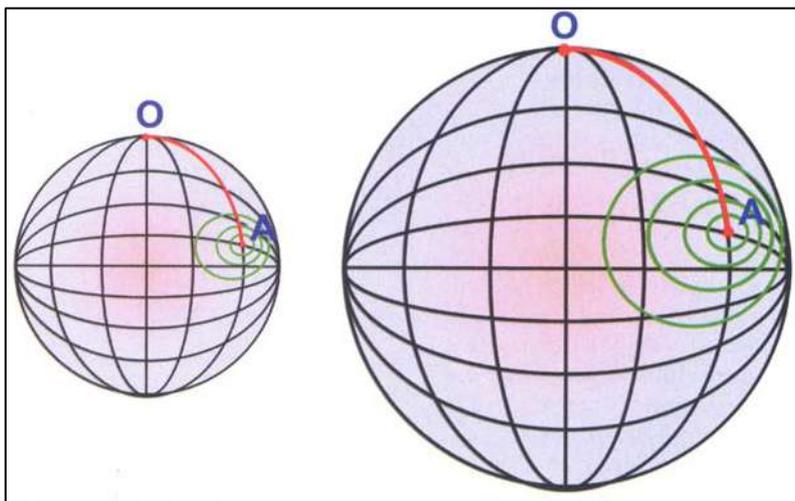
1. M. Landi Degl'Innocenti, " Misure di distanza in Astronomia ", *Giornale di Astronomia*, vol. 5° n.3, settembre 1979
2. M. Rigutti, " La determinazione delle distanze nell'ambito del sistema solare", *Giornale di Astronomia*, vol. 7° n.3, settembre 1981
3. M. Rigutti, " *Cento miliardi di stelle* ", Giunti Martello, Firenze, 1978
4. L. Fontana, " La determinazione delle distanze astronomiche, parte prima ", *le Stelle* n. 35, dicembre 2005
5. P. G. Prada Moroni, " Distanze! ", *le Stelle* n. 13, dicembre 2003
6. F. Caputo, " Le variabili pulsanti come indicatori di distanze galattiche ed extragalattiche ", *Giornale di Astronomia*, vol. 8° n.3, settembre 1982
7. G. Romano, " Delta Cephei ", *l'astronomia* n.28, dicembre 1983
8. C. Marsi, " Le variabili cefeidi e la scala dell'Universo ", *l'astronomia* n.41, febbraio 1985
9. J. D. Fernie, " Cefeidi, un orologio per metro ", *l'astronomia* n.128, gennaio 1993
10. E. Carretti, G, Valentini, " Le distanze delle galassie, parte prima ", *l'astronomia* n.130, marzo 1993
11. E. Carretti, G, Valentini, " Le distanze delle galassie, parte seconda ", *l'astronomia* n.131, aprile 1993
12. Associazione Astronomica Cortina, <http://www.cortinastelle.it/>
13. A. Masani, " Distanze e velocità nell'Universo lontano ", *l'astronomia* n.95, gennaio 1990
14. E. Novati, " Prendere le misure all'Universo ", *le Stelle* n.18, maggio 2004
15. R. Powell, "The Distance Scale of the Universe ", <http://www.atlasoftheuniverse.com/redshift.html>

## UNIVERSO IN ESPANSIONE (\*)

### A. Ipotesi iniziali, parametro di redshift e legge di Hubble

1. L'Universo è omogeneo e isotropo, cioè presenta le stesse caratteristiche e proprietà a qualunque osservatore comunque situato in esso e qualunque sia la direzione in cui guarda.
2. L'Universo si espande, cioè i punti dello spazio si allontanano gli uni dagli altri, trascinati dalla dilatazione dello spazio.

Lo spazio si dilata come la superficie di un pallone che si gonfia. Le maglie del sistema di coordinate seguono la dilatazione, così un osservatore al centro del sistema di riferimento (O) vede aumentare la sua distanza da qualunque punto A, che sembra allontanarsi anche se, in realtà, non si muove sulla superficie, restando ancorato alle stesse coordinate (comoventi).



Le creste delle onde emesse dal punto A sono circonferenze concentriche che si propagano mentre la superficie si dilata; la distanza tra due creste successive è la lunghezza d'onda. La distanza tra le creste cresce nel tempo mentre queste si stanno propagando e perciò quando le onde arriveranno in O la loro lunghezza d'onda sarà maggiore di quando furono emesse: è questo effetto che produce il “redshift” cosmologico. Lo spostamento delle righe spettrali verso il rosso è espresso dal parametro  $z$ , definito da

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda_e}{\lambda_e} = \frac{\lambda_0}{\lambda_e} - 1 \quad (1)$$

(\*) Adattamento da E. Novati “Prendere le misure all'Universo”, Le Stelle n.18, maggio 2004

dove  $\lambda_0$  è la lunghezza d'onda misurata in ricezione e  $\lambda_e$  è la lunghezza d'onda al momento dell'emissione (valore misurato in laboratorio).

La dilatazione dello spazio può essere descritta da un fattore di scala <sup>(x)</sup>  $a(t)$  funzione del tempo cosmico  $t$ . In un determinato istante esso è lo stesso in tutti i punti. Se  $a_0$  indica il suo valore attuale, allora il rapporto  $\frac{a_0}{a(t)}$  indicherà di quanto risulta variata oggi la distanza tra due punti qualsiasi dello spazio in espansione rispetto all'istante  $t$ . Indicando con  $D_0$  e  $D(t)$  le distanze tra due punti determinati, oggi e al tempo  $t$ , possiamo scrivere

$$\frac{a_0}{a(t)} = \frac{D_0}{D(t)} = \frac{\lambda_0}{\lambda_e} = 1 + z \quad (2)$$

se  $\lambda_e = \lambda(t)$  rappresenta la lunghezza d'onda associata a un fotone emesso al tempo  $t$ .

La (2) fornisce un'importante informazione cosmologica, poiché esprime il rapporto tra il fattore di scala dell' Universo (**U.**) al momento attuale e quello al momento dell'emissione della luce, espresso per mezzo del parametro sperimentale  $z$ . L'analogia del pallone che si gonfia permette di ottenere un altro risultato: si può verificare facilmente che ogni punto, ancorato al reticolo di coordinate, vede gli altri allontanarsi a una velocità tanto maggiore quanto maggiore è la loro distanza e, nell'ipotesi di una espansione omogenea e isotropa, la velocità di allontanamento reciproco risulta direttamente proporzionale alla distanza. Indicando con  $v(t)$  la velocità di allontanamento di due determinati punti all'istante  $t$  del tempo cosmico,  $D(t)$  la loro distanza al tempo  $t$ ,  $H$  una costante di proporzionalità che ha lo stesso valore in tutto l'Universo nello stesso istante  $t$  del tempo cosmico (anche se cambia il valore al variare di  $t$ ) risulta

$$v(t) = H \cdot D(t) \quad (3)$$

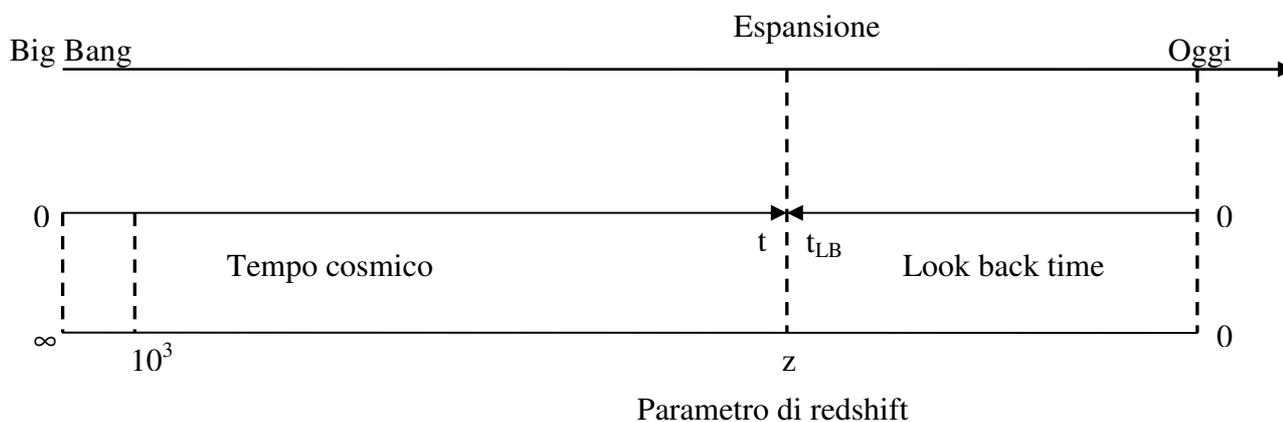
Se  $D(t)$  rappresenta la distanza tra due vertici del reticolo, esso corrisponde al fattore di scala  $a(t)$ ;  $a(t)$  aumenta da  $a$  ad  $a+da$  nell'intervallo di tempo fra  $t$  e  $t+dt$  e

(x) Può essere il raggio del pallone o, meglio, la distanza tra due vertici del reticolo

quindi sarà  $v = \frac{da}{dt}$ , per cui la (3) si può riscrivere come segue

$$v = \frac{da}{dt} = H \cdot a \quad (3')$$

La (3) e la (3') richiamano la legge formulata da Hubble nel 1929 dopo aver osservato e studiato gli spettri di 24 galassie {  $v=H_0 D$ , con  $H_0$  costante di Hubble}, ma le due relazioni non sono la stessa cosa. Infatti la (3') è una previsione teorica di carattere generale, mentre la legge di Hubble è un risultato sperimentale relativo a oggetti piuttosto vicini, per i quali lo spostamento delle righe spettrali verso il rosso era stato interpretato come effetto Doppler dovuto alle velocità di allontanamento delle galassie, in moto nello spazio che circonda la nostra galassia, la via Lattea. Nella (3') invece la velocità e la distanza sono espresse rispetto al sistema di coordinate spaziali comoventi e al tempo cosmico; esse descrivono come varia la distanza tra i punti dello spazio in espansione e non come varia la posizione di un corpo in moto nello spazio. Per questo motivo la velocità  $v = \frac{da}{dt}$  può anche risultare maggiore della velocità della luce.



## B. Ipotesi ulteriori e Modello Cosmologico Standard (MCS)

3. Nel MCS la forza che modella la struttura dell' **U**. e ne determina l'evoluzione è la gravità e l'ambito in cui il modello è costruito è quello della Relatività Generale. Pertanto il moto dei corpi è descritto dalla geometria dello spazio-tempo in cui essi si muovono, geometria che, a sua volta, è determinata dal contenuto di materia, di energia e di pressione dello spazio.

4. Nella parte di **U**. oggi osservabile, la densità della energia elettromagnetica diffusa nello spazio è molto minore della densità di materia e i suoi effetti possono essere trascurati. Anche gli effetti della pressione sono trascurabili, per cui si può pensare che la distribuzione della materia sia come una polvere di galassie che riempie uniformemente lo spazio.

Subito dopo il Big Bang le cose stavano diversamente, ma se ci si accontenta di risalire nel passato fino a un'epoca per la quale  $z \approx 1000$  (separazione della materia dalla radiazione e CBR), l'ipotesi sopra esposta è accettabile.

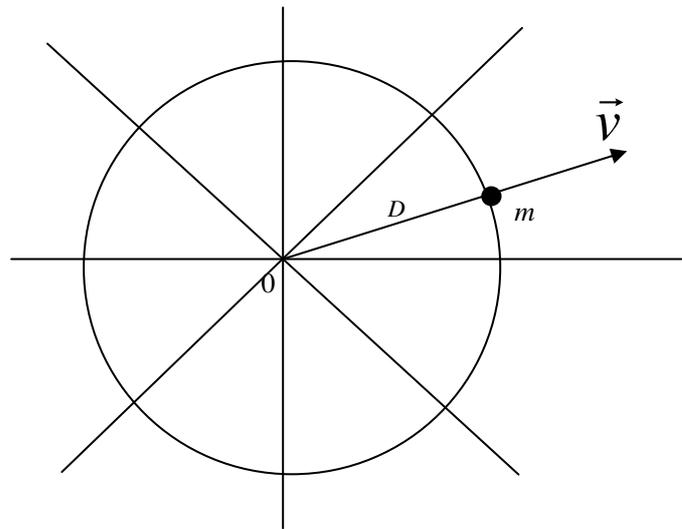
5. Già nel 1917 Einstein elaborò un modello dell'**U**. supposto omogeneo, isotropo e riempito da una polvere di galassie uniformemente distribuite, ma quando trovò che dai calcoli emergeva un **U**. in espansione e non statico, come allora si pensava, modificò le equazioni della R.G. introducendo un nuovo termine che chiamò costante cosmologica. Indicato con  $\Lambda$ , tale termine ha le dimensioni dell'inverso del quadrato di una lunghezza e doveva fornire una specie di repulsione cosmica per bilanciare l'attrazione gravitazionale.

Quando Hubble scoprì la recessione delle galassie, Einstein considerò un errore avere introdotto nelle equazioni il termine  $\Lambda$ , ma oggi nel MCS la costante cosmologica ha un suo ruolo specifico e le viene attribuito un valore  $\sim 10^{-52} \text{ m}^{-2}$ .

### C. La costante di Hubble

Abbiamo visto prima che la costante della legge di Hubble cambia di valore col passare del tempo, ovvero col mutare del parametro di redshift  $z$ , dato che esso è correlato all'**U**. remoto. La funzione  $H(z)$  può essere ricavata utilizzando solo la meccanica newtoniana che, nelle ipotesi fatte in precedenza, costituisce un'ottima approssimazione della R.G. Poiché nella teoria gravitazionale di Newton lo spazio è un'entità assoluta, statico e dotato di una geometria euclidea, non è possibile ricevere informazioni sulla sua eventuale curvatura e il moto di recessione delle galassie viene

interpretato come un effettivo movimento nello spazio e non come espansione dello spazio. Tuttavia le relazioni che si ottengono sono quelle corrette. Immaginiamo di essere al centro di un sistema di coordinate e di osservare un corpo di massa 1 kg posto a distanza  $D$  da noi. La sua energia cinetica sarà  $EC = \frac{1}{2}v^2$  e per la legge di espansione sarà  $EC = \frac{1}{2}H^2D^2$ . Se trascuriamo per il momento la costante cosmologica, l'energia potenziale gravitazionale del corpo è dovuta unicamente alla massa  $M$  interna alla sfera di raggio  $D$ . Indicando con  $\rho$  la densità di materia (polvere di galassie) entro la sfera sarà



$$EP_g = -G \frac{M}{D} = -\frac{G}{D} \frac{4}{3} \pi \rho D^3 = -\frac{4}{3} \pi G \rho D^2$$

e quindi l'energia totale  $E_{TOT}$  sarà data da

$$E_{TOT} = \frac{1}{2} H^2 D^2 - \frac{4}{3} \pi G \rho D^2 \quad (4)$$

Introduciamo ora l'effetto della costante cosmologica, ammettendo che  $EP_g$  non dipenda solo dalla densità di materia  $\rho$ , ma anche da una densità  $\rho_\Lambda$  dovuta alla costante cosmologica, che sarebbe presente anche se la sfera fosse vuota di materia. Avremo allora

$$E_{TOT} = \frac{1}{2} H^2 D^2 - \frac{4}{3} \pi G (\rho + \rho_\Lambda) D^2 \quad (4')$$

e ammettendo che il contenuto di materia nella sfera non cambi (niente entra o esce) per il principio di conservazione dell'energia la (4') avrà lo stesso valore in

ogni istante del tempo cosmico. Indicando con  $D_0$ ,  $H_0$ ,  $\rho_0$  i valori attuali e

considerando che  $\rho_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G}$  è una grandezza costante, sarà

$$E_{TOT} = \frac{1}{2} H^2 D^2 - \frac{4}{3} \pi G (\rho + \rho_\Lambda) D^2 = \frac{1}{2} H_0^2 D_0^2 - \frac{4}{3} \pi G (\rho_0 + \rho_\Lambda) D_0^2 =$$

$$= \frac{4}{3} \pi G D_0^2 \left( \frac{3H_0^2}{8\pi G} - \rho_0 - \rho_\Lambda \right) \quad (5)$$

Ponendo  $\frac{3H_0^2}{8\pi G} = \rho_C$  ,densità critica, si possono fare le seguenti considerazioni:

1. Se  $\rho_\Lambda=0$  e  $\rho_0>\rho_C$  risulta  $E_{TOT} <0$  e quindi  $|EP_g| > |EC|$  ,.per cui il corpo di massa  $m$  prima o poi ricadrà verso l'interno della sfera. Poiché ciò vale per qualunque corpo sulla superficie della sfera e per il Principio Cosmologico la nostra posizione di osservatori equivale a qualunque altra, significa che l'intero **U**. è destinato a collassare su stesso.
2. Se  $\rho_\Lambda=0$  e  $\rho_0<\rho_C$  risulta  $E_{TOT} >0$  e quindi  $EP_g < EC$  ,.per cui l' **U**. è destinato a espandersi per sempre.
3. Se  $\rho_\Lambda>0$ , la situazione non si può descrivere in base all'energia gravitazionale, perché l'effetto della costante  $\Lambda$  è quello di produrre una forza di repulsione proporzionale alla distanza.

La (5) si può riscrivere come segue:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} (\rho + \rho_\Lambda) + \frac{8\pi G}{3} \frac{D_0^2}{D^2} (\rho_C - \rho_0 - \rho_\Lambda) \quad (5')$$

ed essendo  $\frac{8\pi G}{3} = \frac{H_0^2}{\rho_C}$  si ha

$$H^2 = \frac{H_0^2}{\rho_C} (\rho + \rho_\Lambda) + \frac{H_0^2}{\rho_C} \frac{D_0^2}{D^2} (\rho_C - \rho_0 - \rho_\Lambda) \quad (5'')$$

ma per la conservazione della massa entro la sfera, deve essere  $\rho = \rho_0 \frac{D_0^3}{D^3}$  e quindi

$$H^2 = H_0^2 \left[ \frac{\rho_0}{\rho_C} \frac{D_0^3}{D^3} + \frac{\rho_\Lambda}{\rho_C} + \left( 1 - \frac{\rho_0}{\rho_C} - \frac{\rho_\Lambda}{\rho_C} \right) \frac{D_0^2}{D^2} \right] \quad (6)$$

Ricordando la (2) e introducendo i parametri adimensionali  $\Omega_M = \frac{\rho_0}{\rho_C}$  e  $\Omega_\Lambda = \frac{\rho_\Lambda}{\rho_C}$

si ottiene finalmente

$$H^2 = H_0^2 \left[ \Omega_M (1+z)^3 + \Omega_\Lambda + (1 - \Omega_M - \Omega_\Lambda)(1+z)^2 \right] \quad (6')$$

ovvero

$$\left. \begin{aligned} H(z) &= H_0 E(z) \\ \text{con} \\ E(z) &= \left[ \Omega_M (1+z)^3 + (1 - \Omega_M - \Omega_\Lambda)(1+z)^2 + \Omega_\Lambda \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

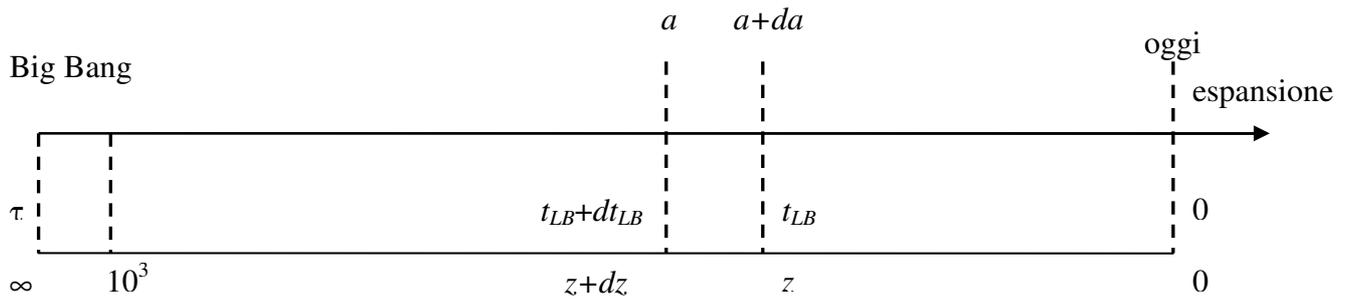
La funzione  $E(z)$  descrive come varia la costante di Hubble al variare di  $z$  e quindi permette di risalire ai suoi valori nel passato rispetto al suo valore attuale, conoscendo i valori dei parametri  $\Omega_M$  e  $\Omega_\Lambda$ .

In seguito ai risultati forniti da recenti esperimenti condotti con sonde spaziali, in particolare BOOMERANG e WMAP, i valori più attendibili delle costanti che figurano nella (7) sono

$$\left. \begin{aligned} H_0 &= 71 \text{kms}^{-1} \text{Mpc}^{-1} \\ \Omega_M &= 0,27 \\ \Omega_\Lambda &= 0,73 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Dagli ultimi due valori risulta che  $\Omega_M + \Omega_\Lambda = 1$  e quindi il secondo termine fra le parentesi quadre si annulla. Ciò significa che l' **U.** non sarebbe curvo, ma piatto con geometria euclidea.

## D. Tempi in funzione del redshift



Dalla figura si nota che il parametro  $z$  e il tempo sono orientati in senso contrario all'espansione a partire dal momento attuale. Il tempo così considerato è noto come look back time  $t_{LB}$  (tempo all'indietro) ed è molto usato per indicare le distanze spaziali e temporali degli astri lontani. Facendo riferimento alla figura e tenendo presente la (3') possiamo scrivere per la dilatazione del fattore di scala in funzione del tempo cosmico

$$da = Hadt \quad (9)$$

D'altro canto dalla (2) si può esprimere  $a$  in funzione di  $z$

$$a = \frac{a_0}{1+z} \Rightarrow da = -\frac{a_0}{(1+z)^2} dz \quad (9')$$

Uguagliando le due espressioni (9) e (9') si ha

$$Hadt = -\frac{a_0}{(1+z)^2} dz$$

e quindi

$$dt = -\frac{a_0}{a} \frac{dz}{(1+z)^2 H} = -\frac{dz}{(1+z)H(z)}$$

Se nel tempo cosmico si passa al look back time, per cui  $dt_{LB} = -dt$ , si ha

$$dt_{LB} = \frac{dz}{(1+z)H(z)} \quad (10)$$

Integrando la (10) il look back time risulta dato da

$$t_{LB} = \int_0^z \frac{dx}{(1+x)H(x)}, \quad \text{con} \quad H(x) = H_0 \left[ \Omega_M (1+x)^3 + \Omega_\Lambda \right]^{\frac{1}{2}} \quad (11)$$

Ponendo  $1+x=y$  e ricordando che  $\Omega_M + \Omega_\Lambda = 1$ , le (11) danno

$$t_{LB} = \frac{1}{H_0 \sqrt{\Omega_M}} \int_1^{1+z} \frac{dy}{y \left[ y^3 + \frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_M} \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (11')$$

dove l'integrale della forma

$$\int_1^{1+z} \frac{dy}{y [y^3 + \alpha]^{\frac{1}{2}}} \quad (12)$$

È risolvibile con la sostituzione

$$t = \frac{\sqrt{y^3 + \alpha} - \sqrt{\alpha}}{\sqrt{y^3 + \alpha} + \sqrt{\alpha}} \Rightarrow \frac{1}{3\sqrt{\alpha}} \frac{dt}{t} = \frac{dy}{y \sqrt{y^3 + \alpha}}$$

Eseguendo i calcoli un po' lunghi e tediosi, si ottiene

$$t_{LB}(z) = \frac{2}{3H_0 \sqrt{\Omega_\Lambda}} \left\{ \ln \frac{1 + \sqrt{\Omega_\Lambda}}{\sqrt{\Omega_M}} - \ln \left[ \sqrt{1 + \frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_M (1+z)^3}} + \sqrt{\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_M (1+z)^3}} \right] \right\} \quad (13)$$

Per  $z \rightarrow \infty$  ( $z \rightarrow 1000$ ) il secondo termine si annulla e così si ottiene l'età dell'U.

$$\tau = \frac{2}{3H_0 \sqrt{\Omega_\Lambda}} \ln \frac{1 + \sqrt{\Omega_\Lambda}}{\sqrt{\Omega_M}} \quad (14)$$

Con i valori (8) e considerando che

$$1 \text{ Mpc} = 10^6 \text{ pc} = 10^6 \times 206.265 \text{ UA} = 3,094 \cdot 10^{19} \text{ km}$$

si trova

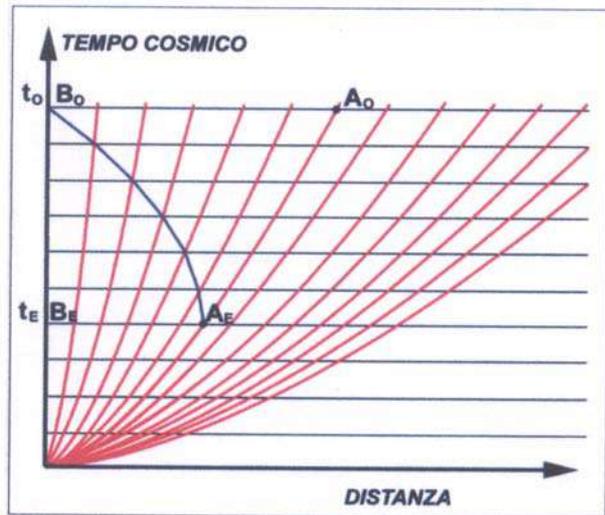
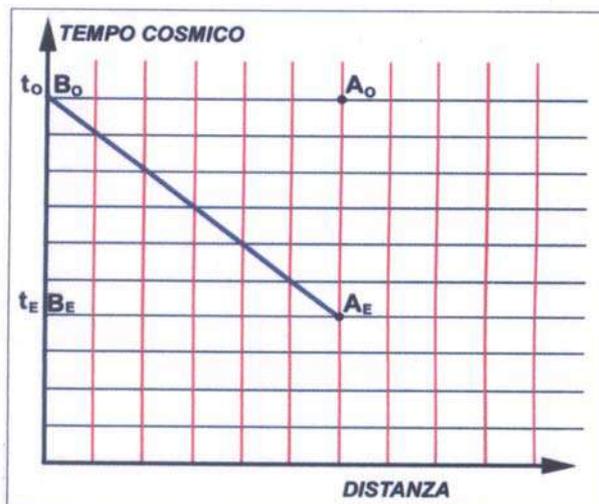
$$\tau = 4,326 \cdot 10^{17} \text{ s} = 13,7 \cdot 10^9 \text{ anni} \quad (14')$$

Poiché il tempo cosmico  $t(z)$  e il look back time  $t_{LB}(z)$  sono legati dalla relazione  $t(z)+t_{LB}(z)=\tau$ , l'espressione del tempo cosmico risulta la seguente

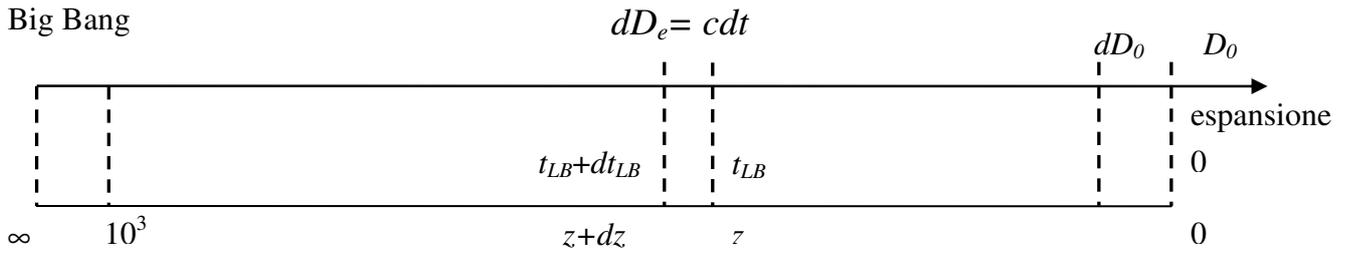
$$t(z) = \frac{2}{3H_0\sqrt{\Omega_\Lambda}} \ln \left[ \sqrt{1 + \frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_M(1+z)^3}} + \sqrt{\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_M(1+z)^3}} \right] \quad (15)$$

### E. Distanze in funzione del redshift

Nel MCS il tempo cosmico scorre allo stesso modo in tutti i punti dello spazio e il calcolo di un intervallo mediante la (15) non è troppo complicato. Diversa è la situazione del calcolo di un intervallo spaziale che separa due punti, perché la loro distanza varia nel tempo. La figura mostra, in alto, il reticolo delle coordinate in un **U.** statico, dove un impulso elettromagnetico emesso in  $A_E$  al tempo  $t_E$  arriva a noi in  $B_0$  al tempo  $t_0$  e la distanza della sorgente è rimasta immutata,  $A_0B_0=A_EB_E$ . La figura in basso, invece, mostra il reticolo delle coordinate in un **U.** in espansione, nel quale l'impulso emesso in  $A_E$ , che si muove verso di noi, è trascinato dallo spazio che si espande e la sua linea di universo non



è più una retta, ma una curva rappresentata dalla linea che attraversa le maglie del reticolo mentre queste si stanno dilatando. Quando la radiazione ci raggiunge in  $B_0$  la sorgente sarà in  $A_0$  e la distanza radiale tra noi ed essa sarà aumentata ( $A_0B_0 > A_EB_E$ ). Per trovare l'espressione della distanza attuale tra due punti comoventi facciamo riferimento alla figura seguente



e riprendiamo in considerazione la relazione che lega l'intervallo temporale infinitesimo  $dt_{LB}$  al redshift cosmologico  $z$ . Dalle (10) abbiamo

$$dz = H(z)(1+z)dt_{LB} \Rightarrow cdz = H(z)(1+z)c dt_{LB} \quad (16)$$

dove  $cdt_{LB}$  rappresenta la distanza  $dD_e$ , considerata in valore assoluto, tra i due punti dello spazio in cui si è trovato un fotone, in moto verso di noi, negli istanti  $t_{LB} + dt_{LB}$  e  $t_{LB}$ . Per la (2) la distanza odierna fra gli stessi punti è data da  $dD_0 = (1+z)dD_e$  per cui la (16) diviene

$$cdz = H(z)dD_0 \Rightarrow D_0(z) = c \int_0^z \frac{dx}{H(x)} \quad (17)$$

La distanza attuale di una galassia con redshift  $z$  è dunque

$$D_0(z) = \frac{c}{H_0} \int_0^z \frac{dx}{[\Omega_M(1+z)^3 + \Omega_\Lambda]^{\frac{1}{2}}} \quad (17')$$

Ma l'integrale nella (17') non è calcolabile direttamente e occorre quindi utilizzare metodi numerici approssimati.

La distanza della galassia con redshift  $z$  all'istante della emissione del lampo di luce è legata a  $D_0(z)$  dalla (2), per cui

$$D_e(z) = \frac{D_0(z)}{1+z} \quad (18)$$

Inoltre, la distanza percorsa dal lampo di luce emesso da una galassia con redshift  $z$  è data da

$$D_L(z) = ct_{LB}(z) \quad (19)$$

### F. La velocità di recessione al momento della emissione

Per la (3') possiamo esprimere la velocità di recessione di una galassia di redshift  $z$ , al momento della emissione di un impulso elettromagnetico, come

$$v_e(z) = H(z)D_e(z) = \frac{H(z)}{1+z} D_0(z) \quad (20)$$

ovvero

$$v_e(z) = \frac{[\Omega_M(1+z)^3 + \Omega_\Lambda]^{\frac{1}{2}}}{1+z} c \int_0^z \frac{dx}{[\Omega_M(1+x)^3 + \Omega_\Lambda]^{\frac{1}{2}}} \quad (20')$$

### G. Calcolo di tempi, distanze e velocità

Se nelle (15), (13), (17') e (20') si introducono i valori (8) si ha

$$\begin{aligned} t(z) &= \frac{2}{3,71 \text{kms}^{-1} \text{Mpc}^{-1} \sqrt{0,73}} \ln \left[ \sqrt{1 + \frac{2,7}{(1+z)^3}} + \sqrt{\frac{2,7}{(1+z)^3}} \right] = \\ &= 1,078 \cdot 10^{10} \ln \left[ \sqrt{1 + \frac{2,7}{(1+z)^3}} + \sqrt{\frac{2,7}{(1+z)^3}} \right] \text{anni} \end{aligned} \quad (21)$$

$$t_{LB}(z) = \tau - t(z) = 13,7 \cdot 10^9 \text{ anni} - t(z) \quad (22)$$

$$\begin{aligned} D_0(z) &= \frac{c}{H_0 \sqrt{\Omega_M}} \int_1^{1+z} \frac{dy}{\sqrt{y^3 + 2,7}} = \frac{3,0 \cdot 10^5 \text{kms}^{-1} \cdot 1 \text{Mpc}}{71 \text{kms}^{-1} \cdot \sqrt{0,27}} I \\ &= 8,13 \cdot 10^3 \cdot 10^6 \cdot 3,26 I(z) \text{ al} = 2,65 \cdot 10^{10} I(z) \text{ al} \end{aligned} \quad (23)$$

dove

$$I(z) = \int_1^{1+z} \frac{dy}{\sqrt{y^3 + 2,7}} \quad (24)$$

$$D_e(z) = \frac{D_0(z)}{1+z} \quad (25)$$

$$v_e(z) = c \frac{\sqrt{(1+z)^3 + \frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_M}}}{1+z} \int_1^{1+z} \frac{dy}{\sqrt{y^3 + \frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_M}}}$$

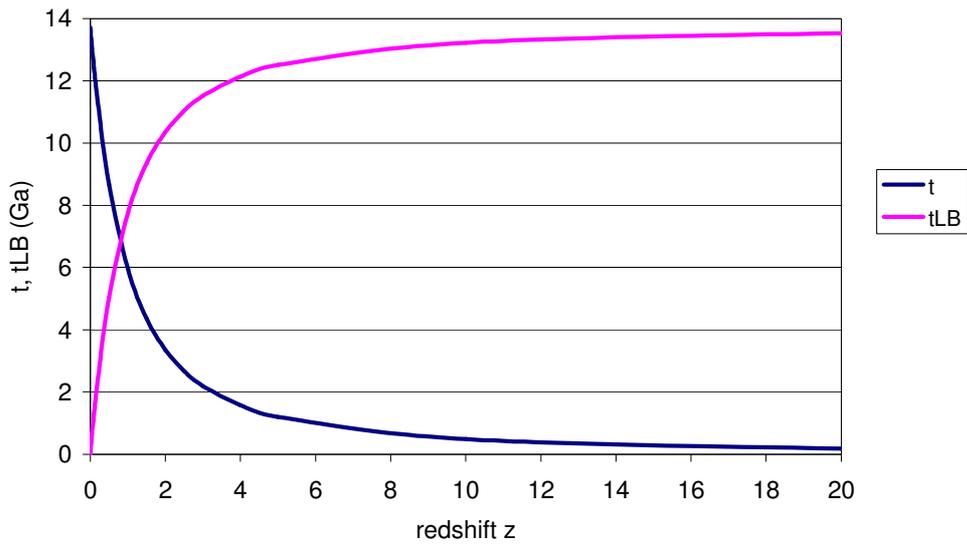
$$\frac{v_e(z)}{c} = \frac{\sqrt{(1+z)^3 + 2,7}}{1+z} I(z) \quad (26)$$

Nella tabella seguente sono riportati i dati delle varie grandezze per una serie di valori di  $z$  da 0 a 1000. Seguono i grafici dei tempi, delle distanze e delle velocità in funzione di  $z$ . Va precisato che, per i grandi valori di  $z$  in fondo alla tabella, i dati sono poco accurati.

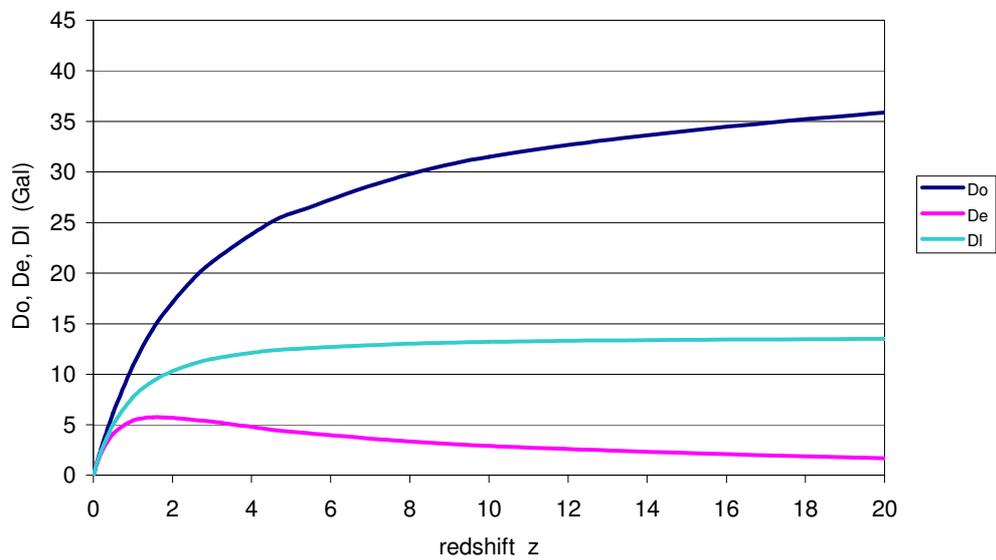
#### UNIVERSO TABELLA

$z$	$t_e$ ( Ga )	$t_{LB}$ ( Ga )	$D_e$ ( Gal )	$D_o$ ( Gal )	$D_{luce}$ ( Gal )	$V_e$ ( c )
0,00	13,7	0,00	0,00	0,0	0,00	0,00
0,01	13,6	0,14	0,14	0,1	0,14	0,01
0,05	13,0	0,67	0,65	0,7	0,67	0,05
0,10	12,4	1,29	1,22	1,4	1,29	0,09
0,20	11,3	2,41	2,20	2,6	2,41	0,17
0,50	8,68	5,03	4,10	6,1	5,03	0,38
1,00	5,96	7,75	5,40	10,8	7,75	0,67
1,50	4,36	9,35	5,75	14,4	9,35	0,93
2,00	3,36	10,35	5,70	17,1	10,35	1,17
2,50	2,68	11,03	5,50	19,3	11,03	1,40
3,00	2,20	11,51	5,30	21,1	11,51	1,63
4,00	1,58	12,13	4,80	23,8	12,13	2,05
5,00	1,20	12,50	4,30	25,9	12,50	2,40
10,0	0,485	13,22	2,90	31,5	13,22	4,00
20,0	0,184	13,52	1,70	35,9	13,52	6,17
30,0	0,103	13,61	1,20	37,9	13,61	7,81
40	0,067	13,64	0,96	39,2	13,64	9,5
50	0,049	13,66	0,78	40,0	13,66	11
100	0,017	13,69	0,42	42,2	13,69	16
500	0,0016	13,71	0,09	45,0	13,71	38
1000	0,0006	13,71	0,05	45,6	13,71	60

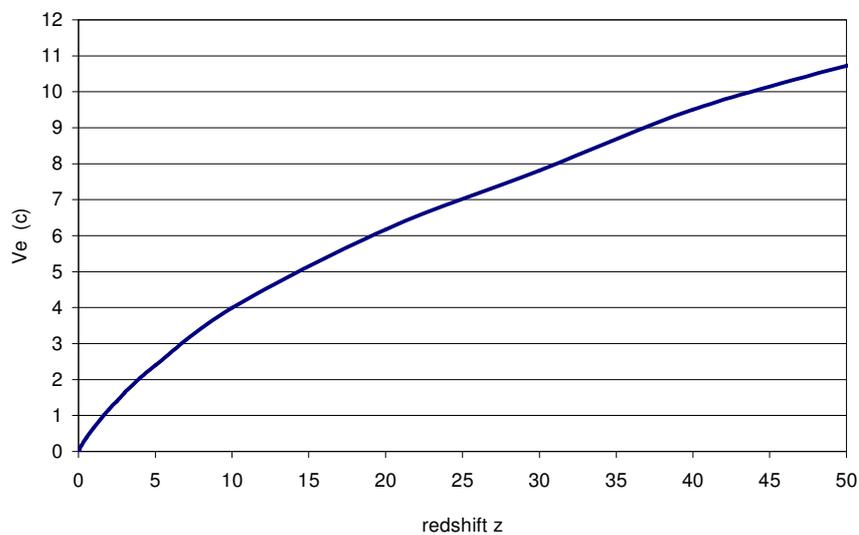
## Tempo cosmico, look back time



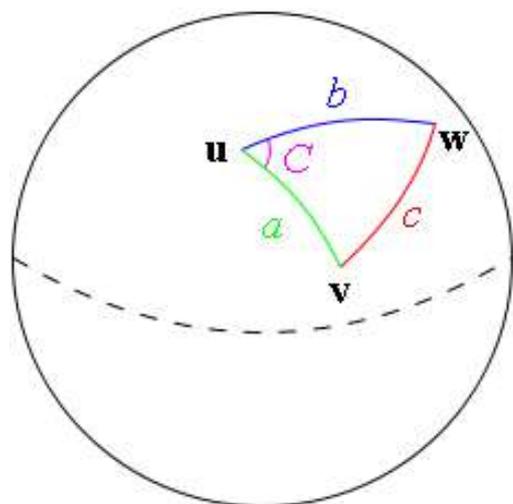
## Distanze $D_0$ , $D_e$ , $D_l$



## Velocità recessione



## TRIANGOLO SFERICO E LEGGE DEI COSENI



La figura rappresenta una superficie sferica di raggio unitario.

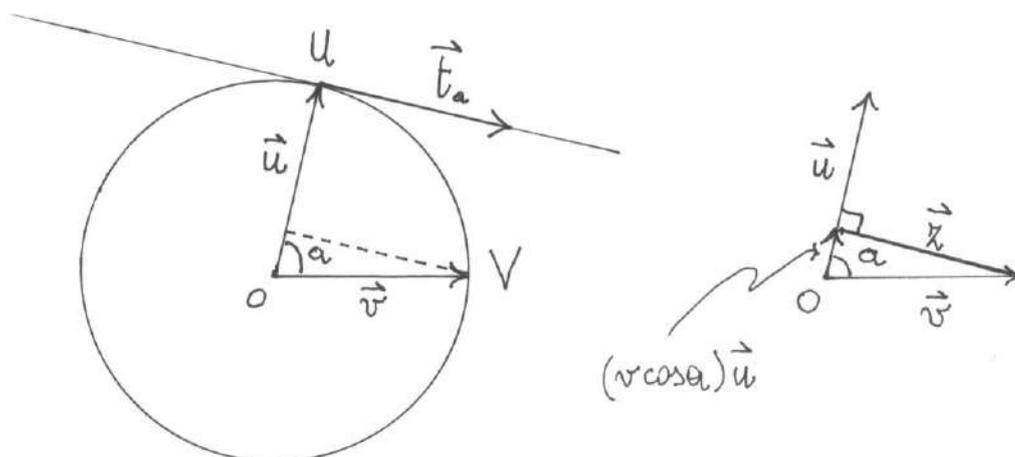
$\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{w}$  indicano i versori che dal centro della sfera vanno ai corrispondenti vertici del triangolo sferico  $abc$  i cui lati sono archi di cerchi massimi.

Le lunghezze degli archi corrispondono alle misure, in radianti, dei rispettivi angoli al centro.

Valgono le seguenti relazioni

$$\left. \begin{aligned} \cos(a) &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \\ \cos(b) &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} \\ \cos(c) &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \end{aligned} \right\} (1)$$

L'angolo  $C$ , fra  $a$  e  $b$  è l'angolo formato dalle rette tangenti ai due archi nell'estremo punta di  $\mathbf{u}$ , ovvero l'angolo tra i due versori  $\mathbf{t}_a$  e  $\mathbf{t}_b$ , diretti come le tangenti e aventi l'origine nello stesso estremo. Determiniamo  $\mathbf{t}_a$ , facendo riferimento alla figura seguente che rappresenta la sezione della sfera che contiene i versori  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$ .



Il vettore  $\mathbf{z}$  risulta perpendicolare al versore  $\mathbf{u}$  e quindi parallelo al versore  $\mathbf{t}_a$ ; esso è dato dalla differenza tra il versore  $\mathbf{v}$  e il vettore  $[|\mathbf{v}|\cos(a)]\mathbf{u}$ , proiezione di  $\mathbf{v}$  su  $\mathbf{u}$ ,

$$\mathbf{z} = \mathbf{v} - [|\mathbf{v}|\cos(a)]\mathbf{u}$$

e ha modulo

$$|\mathbf{z}| = |\mathbf{v}|\sin(a)$$

Ne deriva che

$$\mathbf{t}_a = \frac{\mathbf{z}}{|\mathbf{z}|} = \frac{\mathbf{v} - [|\mathbf{v}|\cos(a)]\mathbf{u}}{|\mathbf{v}|\sin(a)} = \frac{\mathbf{v} - \cos(a)\mathbf{u}}{\sin(a)} \quad (2)$$

Analogamente si trova che

$$\mathbf{t}_b = \frac{\mathbf{w} - \cos(b)\mathbf{u}}{\text{sen}(b)} \quad (2')$$

per cui dal prodotto scalare tra i versori  $\mathbf{t}_a$  e  $\mathbf{t}_b$  si ottiene

$$\mathbf{t}_a \cdot \mathbf{t}_b = \cos(C) = \frac{\mathbf{v} - \cos(a)\mathbf{u}}{\text{sen}(a)} \cdot \frac{\mathbf{w} - \cos(b)\mathbf{u}}{\text{sen}(b)} = \frac{\cos(c) - \cos(a)\cos(b)}{\text{sen}(a)\text{sen}(b)} \quad (3)$$

Dalla (3) si ricava la relazione seguente

$$\cos(c) = \cos(a)\cos(b) + \text{sen}(a)\text{sen}(b)\cos(C) \quad (4)$$

nota, nella trigonometria sferica, come *legge dei coseni*.

### TRIANGOLO DI POSIZIONE E SOLE CHE SORGE ALL'ORIZZONTE

P : polo Nord

$\lambda$  : latitudine

Z : zenit

N : nadir

A : astro

PZA : triangolo di posizione dell'astro

$\gamma A_2$  : ascensione retta

$A_2A = \delta$  : declinazione

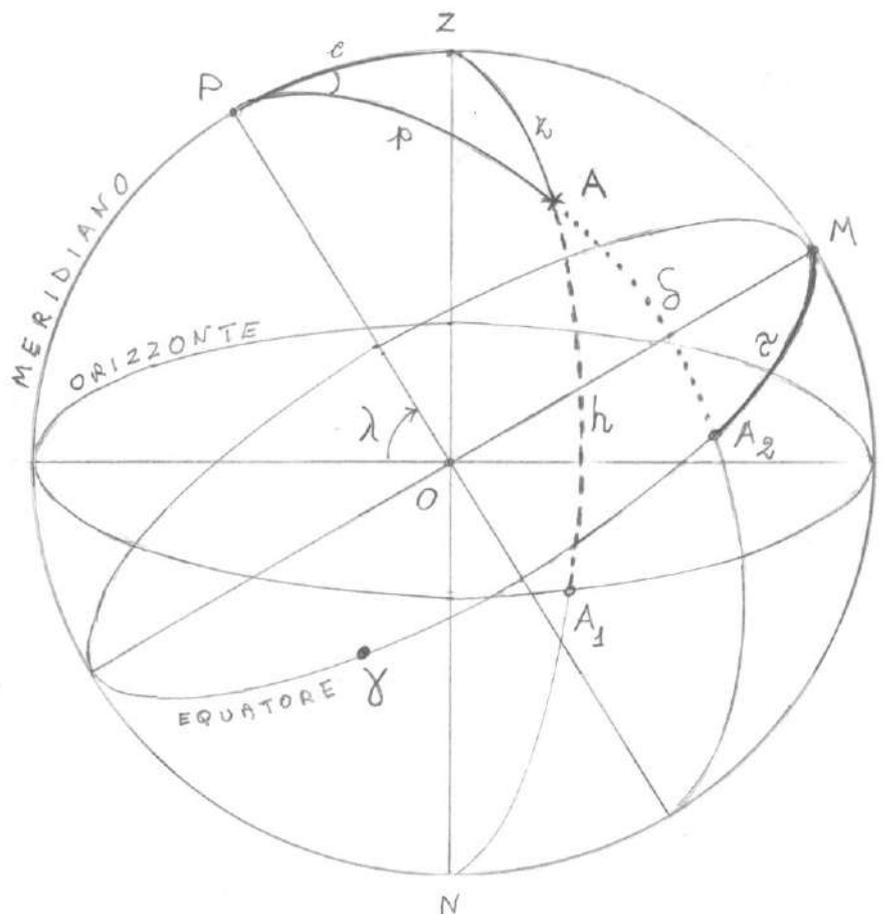
$A_1A = h$  : altezza

$MOA_2 = \tau$  : angolo orario

$p$  : distanza polare

$z$  : distanza zenitale

$c$  : colatitudine



Per la legge dei coseni applicata al triangolo sferico PZA vale la relazione

$$\cos(z) = \cos(c)\cos(p) + \sin(c)\sin(p)\cos(P)$$

ma, essendo

$$\begin{aligned} z &= 90^\circ - h \\ c &= 90^\circ - \lambda \\ p &= 90^\circ - \delta \\ P &= \mathbf{t}_c \cdot \mathbf{t}_p = \text{MOA}_2 = \tau \end{aligned}$$

risulta

$$\sin(h) = \sin(\lambda)\sin(\delta) + \cos(\lambda)\cos(\delta)\cos(\tau) \quad (1)$$

Derivando la (1) rispetto al tempo si ottiene

$$\cos(h) \cdot dh/dt = \sin(\lambda)\cos(\delta) \cdot d\delta/dt + \cos(\lambda) \cdot [-\sin(\delta) \cdot d\delta/dt \cdot \cos(\tau) - \cos(\delta)\sin(\tau) \cdot d\tau/dt] \quad (2)$$

ma, poiché  $d\delta/dt$  è molto più piccola di  $d\tau/dt$  e di  $dh/dt$ , la (2) si riduce a

$$\cos(h) \cdot dh/dt \approx -\cos(\lambda)\cos(\delta)\sin(\tau) \cdot d\tau/dt \quad (2')$$

Quando il Sole sorge  $h \approx 0$  e quindi  $\cos(h) \approx 1$ , per cui avremo

$$dh/dt \approx -\cos(\lambda)\cos(\delta)\sin(\tau) \cdot d\tau/dt \quad (3)$$

Inoltre, sempre per  $h \approx 0$ , dalla (1) si ha

$$0 \approx \sin(\lambda)\sin(\delta) + \cos(\lambda)\cos(\delta)\cos(\tau) \quad \text{da cui} \quad \cos(\tau) \approx -\text{tg}(\lambda)\text{tg}(\delta)$$

e quindi

$$\sin(\tau) = [1 - \cos^2(\tau)]^{1/2} \approx [1 - \text{tg}^2(\lambda)\text{tg}^2(\delta)]^{1/2} \quad (4)$$

Sostituendo la (4) nella (3) e considerando che

$$d\tau/dt = 360 \text{ gradi} / 1436 \text{ min} \approx 0,2507 \text{ gradi} / \text{min} \approx 0,2507 \text{ primi d'arco} / \text{s}$$

si ottiene la relazione

$$dh/dt \approx -\cos(\lambda)\cos(\delta) \cdot [1 - \text{tg}^2(\lambda)\text{tg}^2(\delta)]^{1/2} \cdot 0,2507 \text{ primi d'arco} / \text{s} \quad (5)$$

La (5) è l'espressione della velocità con cui il Sole, quando sorge, sale perpendicolarmente al piano dell'orizzonte. Per trovare il tempo impiegato dal disco solare ad attraversare la linea dell'orizzonte basta dividere il diametro per il modulo della velocità

$$2R_{\odot} / |dh/dt| \approx 2R_{\odot} \cdot \{\cos(\lambda)\cos(\delta) \cdot [1 - \text{tg}^2(\lambda)\text{tg}^2(\delta)]^{1/2} \cdot 0,2507 \text{ primi d'arco / s} \}^{-1} \approx \Delta t \quad (6)$$

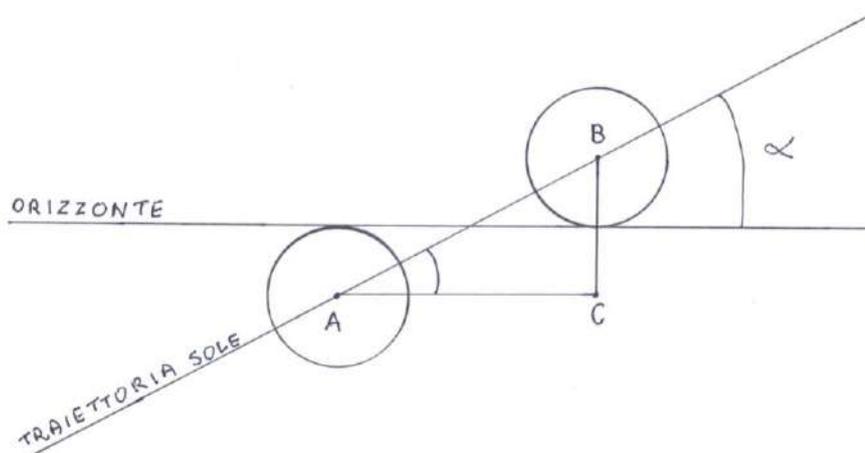
Possiamo ora utilizzare la (6) per calcolare i valori di  $\Delta t$  relativi ad alcune giornate estive a Riccione e confrontarli con i corrispondenti valori misurati da un filmato, da una serie di foto e direttamente a occhio nudo.

$$\lambda_{\text{RICCIONE}} = 44,0^{\circ}, \quad \cos(\lambda) = 0,7193, \quad \text{tg}(\lambda) = 0,9657, \quad \text{tg}^2(\lambda) = 0,9326$$

data 2009	metodo	$2R_{\odot}$ (primi)	$\delta$ (gradi)	$\cos(\delta)$	$\text{tg}(\delta)$	$\text{tg}^2(\delta)$	$\Delta t$ (s)	$\Delta t_{\text{SP}}$ (s)
12/07	filmato	31,47	21,95	0,9275	0,4030	0,1624	204	$202 \pm 6$
17/07	occhio nudo	31,47	21,383	0,9312	0,3916	0,1533	202	$200 \pm 6$
26/07	fotografie	31,49	19,40	0,9432	0,3522	0,1240	197	$212 \pm 6$
30/07	occhio nudo	31,50	18,30	0,9494	0,3307	0,1094	194	$200 \pm 6$
08/08	occhio nudo	31,55	15,92	0,9617	0,2852	0,0813	189	$190 \pm 6$
12/08	occhio nudo	31,57	15,00	0,9659	0,2679	0,0718	188	$188 \pm 6$

Le ultime due colonne della tabella evidenziano il buon accordo tra la teoria e i dati sperimentali.

Un'altra misura interessante è quella dell'angolo che, all'alba, la traiettoria del Sole forma con l'orizzonte.



In un breve intervallo di tempo, come quello impiegato dal disco solare per attraversare la linea dell'orizzonte, la traiettoria dell'astro corrisponde a un piccolo tratto del parallelo celeste di declinazione  $\delta$ . Per trovare l'angolo  $\alpha$  che essa forma con l'orizzonte, osserviamo dalla figura che

$$\left. \begin{array}{l} \text{---} \quad \text{---} \\ \text{---} \quad \text{---} \end{array} \right\} \overline{AB} : \text{percorso del Sole lungo il parallelo di declinazione } \delta$$

$\text{sen}(\alpha) = \overline{CB} / \overline{AB}$  , dove

$\overline{CD}$  : percorso del Sole lungo la verticale

Ma  $\overline{AB} = d\tau/dt \cdot \Delta t$  e  $\overline{CD} = |dh/dt| \cdot \Delta t$  per cui

$$\text{sen}(\alpha) = |dh/dt| / d\tau/dt = | dh/ d\tau | \quad (7)$$

Dalla (3) si ha

$$| dh/ d\tau | \approx \cos(\lambda)\cos(\delta)\text{sen}(\tau) / \cos(h) \quad (8)$$

e, al sorgere del Sole, tenendo presente la (4)

$$| dh/ d\tau | \approx \cos(\lambda)\cos(\delta) \cdot [1 - \text{tg}^2(\lambda)\text{tg}^2(\delta)]^{1/2} \quad (8')$$

per cui l'angolo della traiettoria del Sole con l'orizzonte risulta

$$\alpha \approx \arcsen \{ \cos(\lambda)\cos(\delta) \cdot [1 - \text{tg}^2(\lambda)\text{tg}^2(\delta)]^{1/2} \} \quad (9)$$

La relazione (9) mostra come l'angolo  $\alpha$  dipenda dalla declinazione del Sole e dalla latitudine del luogo. Nei giorni considerati in precedenza si trova

data 2009	sen( $\alpha$ )	$\alpha$ (gradi)
12/07	0,614	37,9
17/07	0,620	38,3
26/07	0,637	39,6
30/07	0,647	40,3
08/08	0,665	41,7
12/08	0,671	42,2

All'equinozio  $\delta = 0^\circ$  per cui  $\text{sen}(\alpha) \approx \cos(\lambda) = \text{sen}(90^\circ - \lambda)$  e quindi  $\alpha \approx 90^\circ - \lambda$  che rappresenta la colatitudine del luogo. Nel caso di Riccione si avrebbe  $\alpha \approx 46^\circ$ . Quanto alla durata del sorgere del Sole all'orizzonte, all'equinozio si avrebbe

$$2R_{\odot} \approx 31,88 \text{ primi} \quad \text{e} \quad \Delta t \approx 177 \text{ s}$$



# **SIMMETRIE ZINWELBIE**

**LUIGI TOGLIANI**

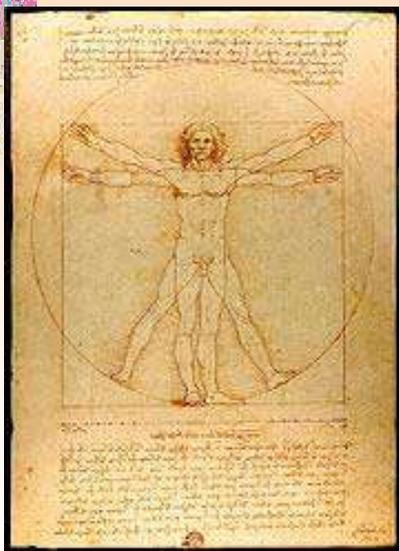
**CORSO AIF-MATHESIS 26 aprile 2010**

**LICEO SCIENTIFICO BELFIORE - MN**

# SIMMETRIA

*συμμετρία* (con misura)

**SIMMETRICO → BEN PROPORZIONATO,  
ARMONICO, COMMENSURABILE**



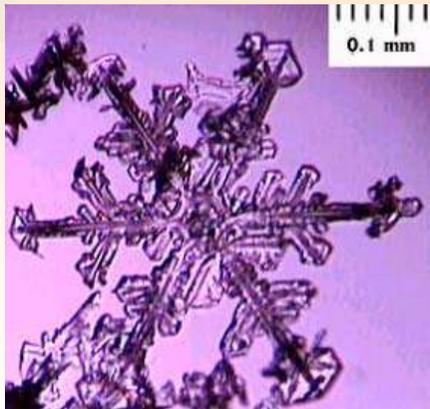
*“La simmetria risulta dalla  
proporzione. La proporzione è la  
commisurazione tra il tutto e le  
parti che lo costituiscono”*

**(VITRUVIO)**

# SIMMETRIA

**SIMMETRICO → EQUILIBRATO, BILANCIATO**

*“E’ lo stato d’animo ugualmente distante dai due estremi”* (GALENO)

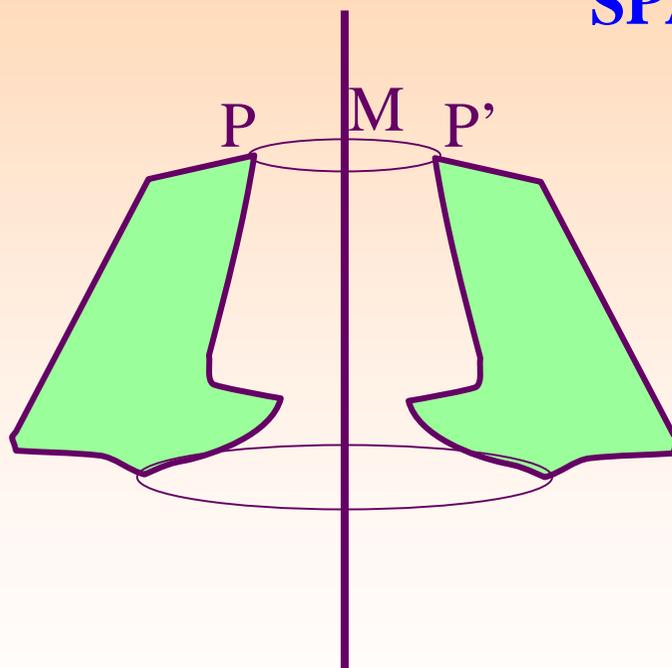




# SIMMETRIE: GEOMETRIA E ARTE

# SIMMETRIA ASSIALE

SIMMETRIA ASSIALE ORTOGONALE O  
RIFLESSIONE RISPETTO AD UNA **RETTA** O  
RIBALTAMENTO (ROTAZIONE DI 180° NELLO  
SPAZIO)



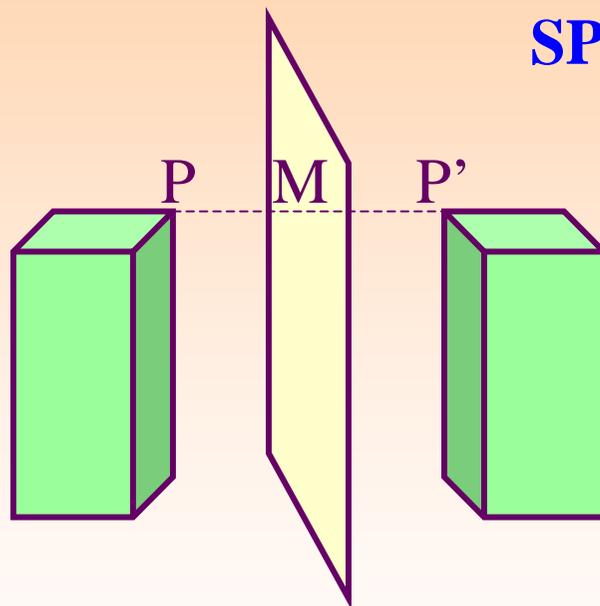
$$\sigma: P \rightarrow P'$$

M punto medio  
di [PP']

asse di  
simmetria

# SIMMETRIA ASSIALE

SIMMETRIA ASSIALE ORTOGONALE O  
RIFLESSIONE RISPETTO AD UN PIANO O  
RIBALTAMENTO (ROTAZIONE DI 180° NELLO  
SPAZIO)



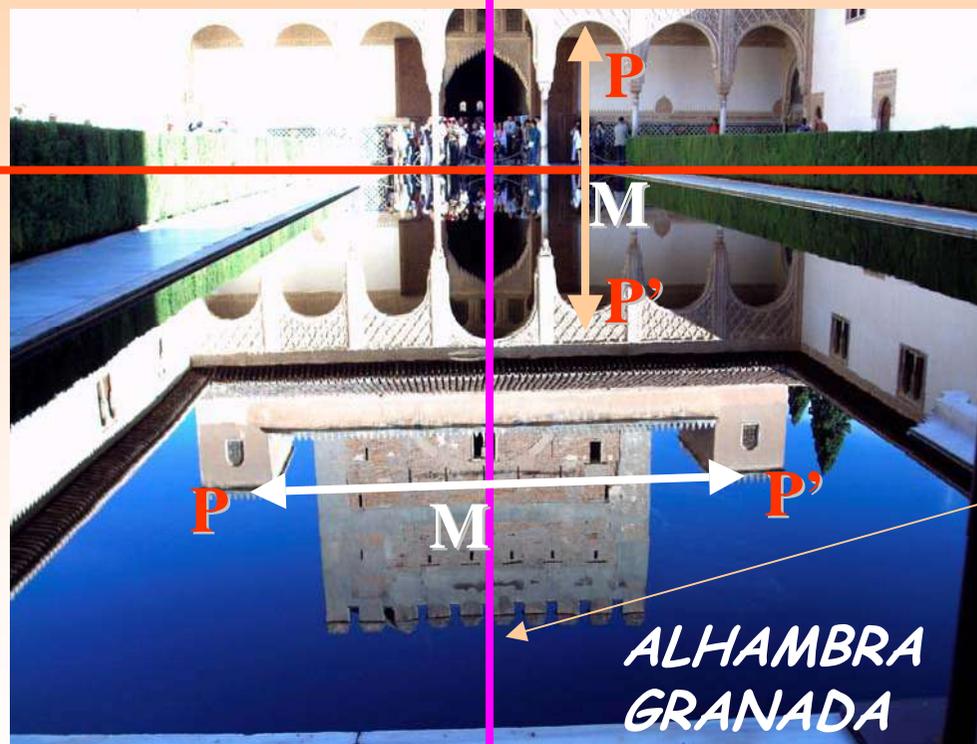
$$\sigma: P \rightarrow P'$$

M punto medio  
di [PP']

piano di  
simmetria

# SIMMETRIA BILATERALE

UNA FIGURA È SIMMETRICA RISPETTO AD UNA RETTA (PIANO), CIOÈ HA UN ASSE (PIANO) DI SIMMETRIA



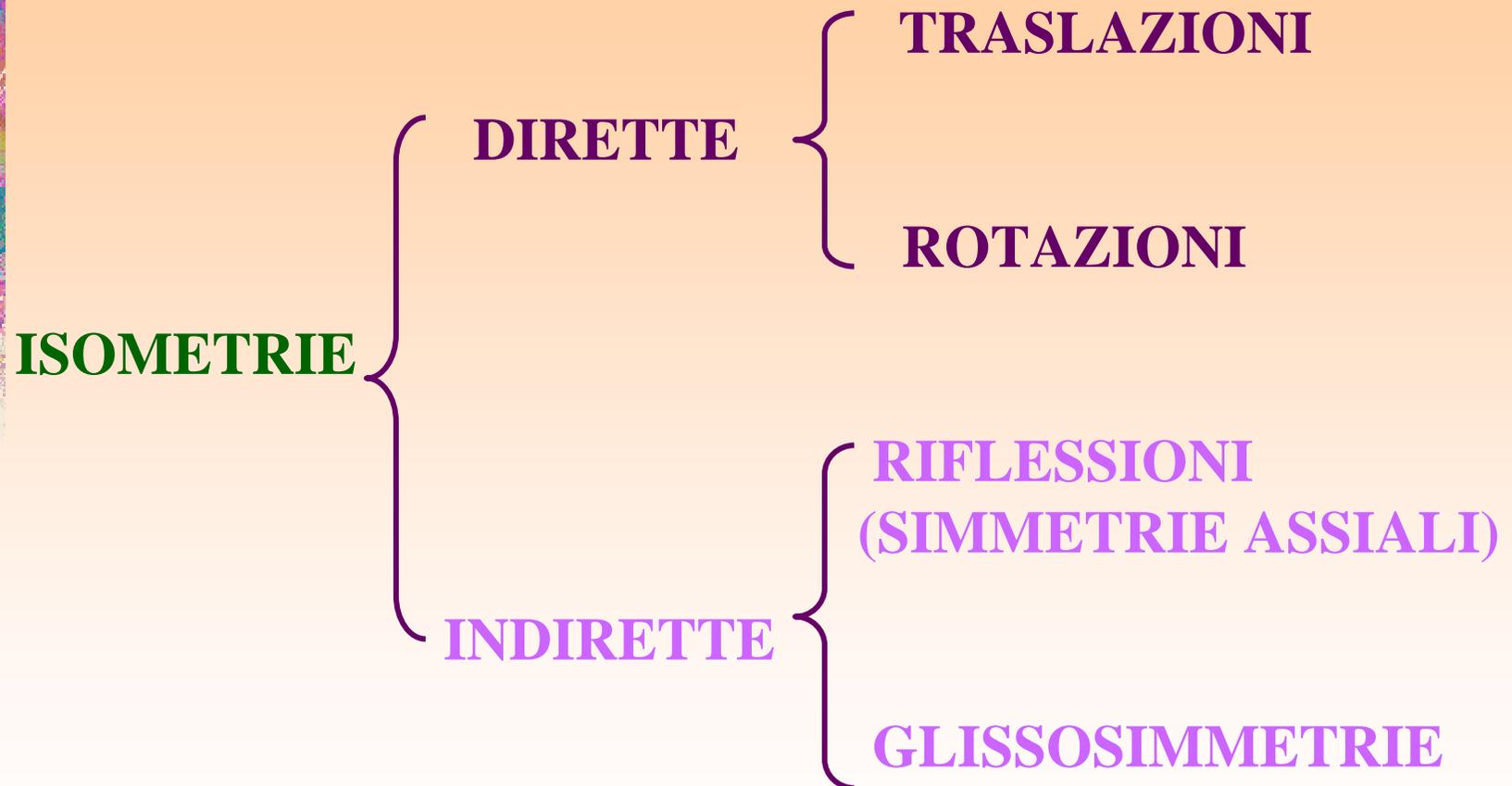
$$\sigma: P \rightarrow P'$$

M punto medio  
di [PP']

asse (piano) di  
simmetria

# ISOMETRIE

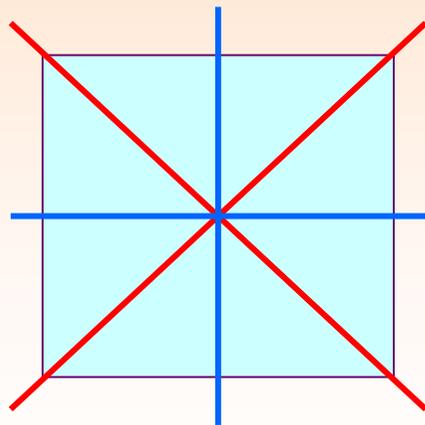
**ISOMETRIE DEL PIANO (*Chasles, 1831*):**



# SIMMETRIE DI UNA FIGURA

*SIMMETRIA DI UNA FIGURA: ISOMETRIA CHE LASCIA IMMUTATA UNA FIGURA*

*L'INSIEME DELLE SIMMETRIE DI UNA FIGURA QUALSIASI RISPETTO ALL'OPERAZIONE DI COMPOSIZIONE È UN GRUPPO*

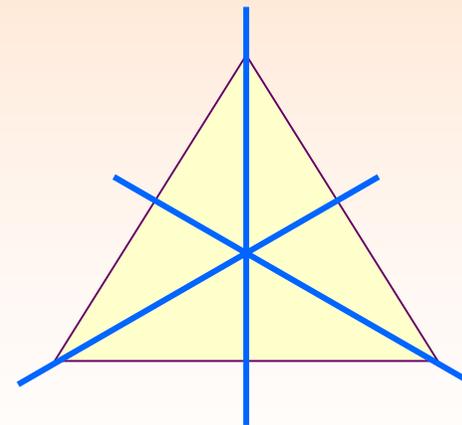


**Quadrato**

4 riflessioni

3 rotazioni

identità



**Triangolo equilatero**

3 riflessioni

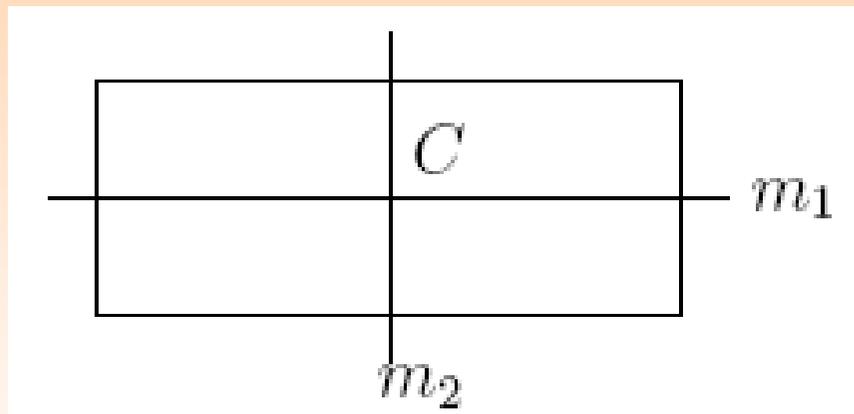
2 rotazioni

identità

# GRUPPI DI SIMMETRIE DELLE FIGURE

## SIMMETRIE DEL RETTANGOLO

### GRUPPO DI SIMMETRIE



*	$e$	$m_1$	$m_2$	$r$
$e$	$e$	$m_1$	$m_2$	$r$
$m_1$	$m_1$	$e$	$r$	$m_2$
$m_2$	$m_2$	$r$	$e$	$m_1$
$r$	$r$	$m_2$	$m_1$	$e$

$m_1, m_2$ : riflessioni       $r$ : rotazione di  $180^\circ$        $e$ : identità

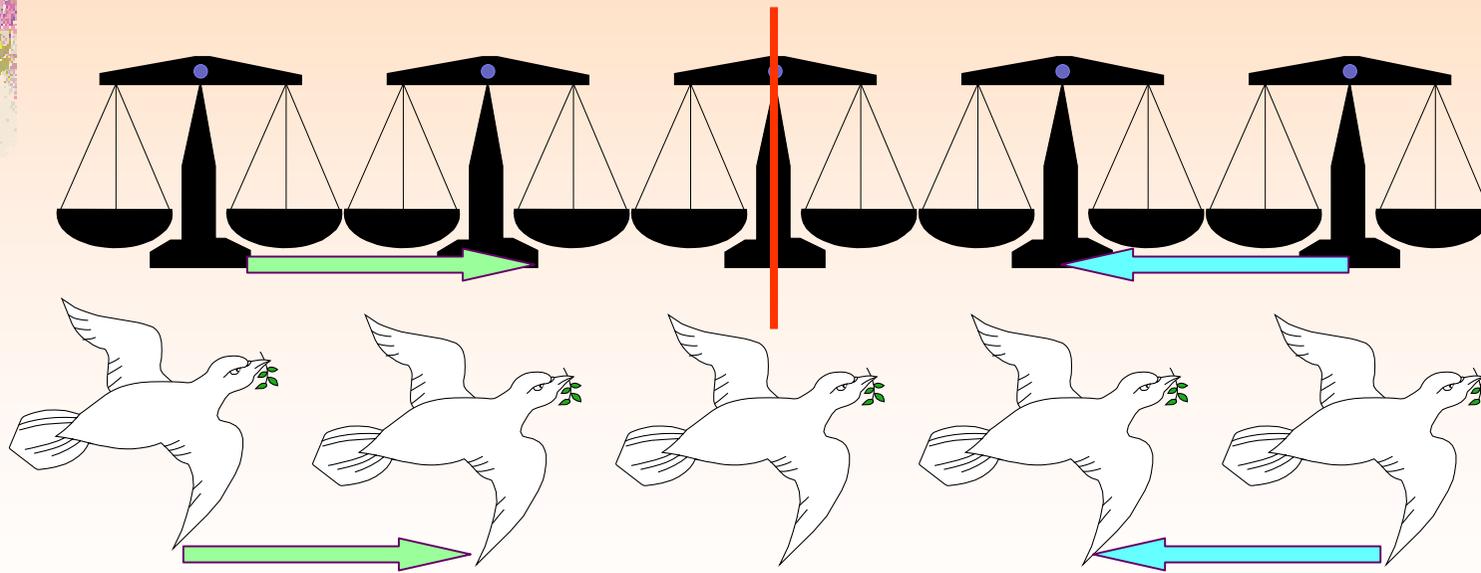
# SIMMETRIA

## TRASLATORIA: FREGI

SIMMETRIA DI TIPO UNIDIMENSIONALE

I) TRASLAZIONE + RIFLESSIONE

II) TRASLAZIONE

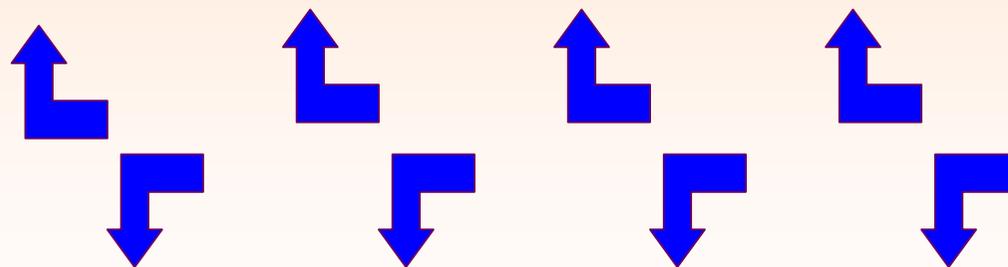


# FREGI

**FREGIO: USO DELLA TRASLAZIONE SOLO IN  
UNA DIREZIONE**

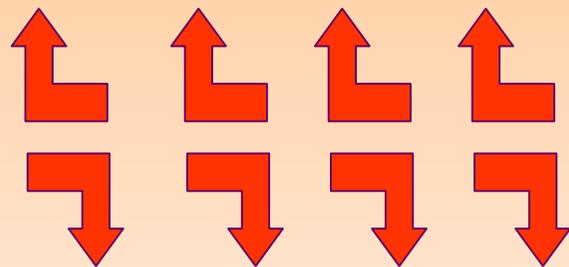


$p111$   
traslazione

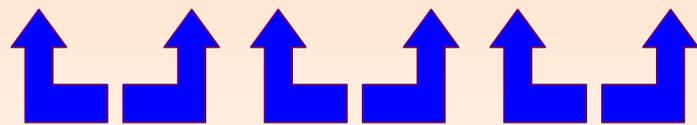


$p1g1$   
glissoriflessione

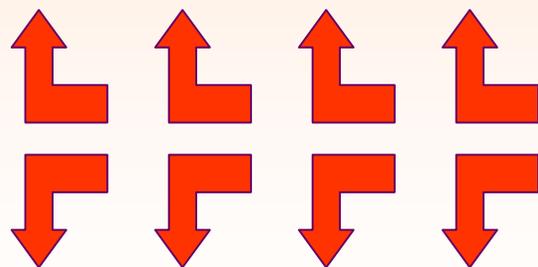
# FREGI



p112 rotazione (simmetria centrale)

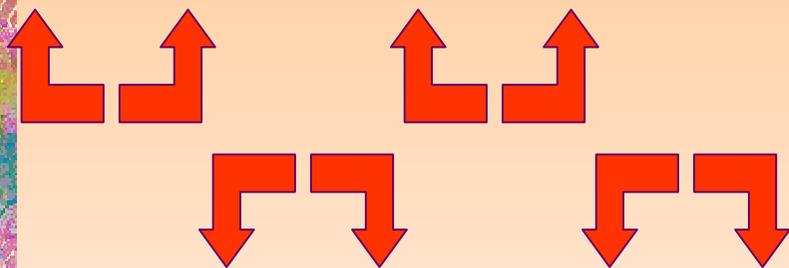


pm1 riflessione verticale

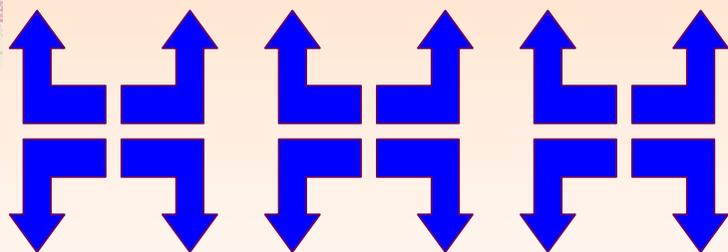


p1m1 riflessione orizzontale

# FREGI



$pmg_2$  riflessione verticale,  
glissosimmetria, rotazione



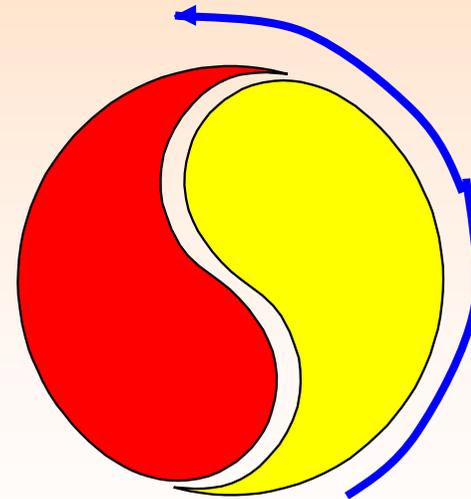
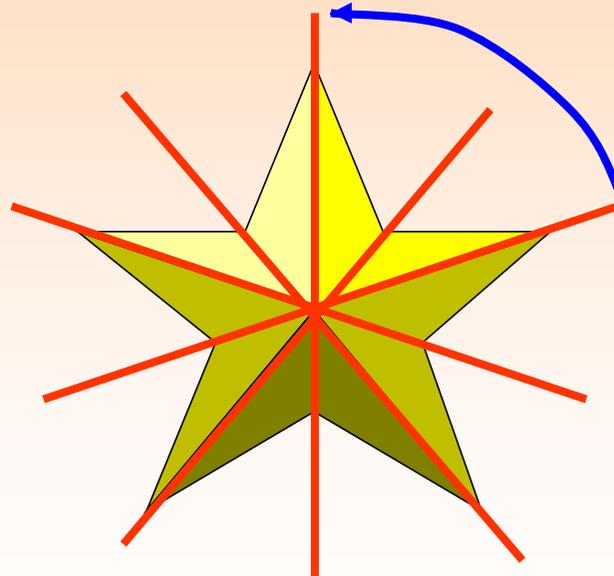
$pmm_2$  riflessione verticale,  
riflessione orizzontale,  
rotazione

# SIMMETRIA ROTATORIA: ROSONI

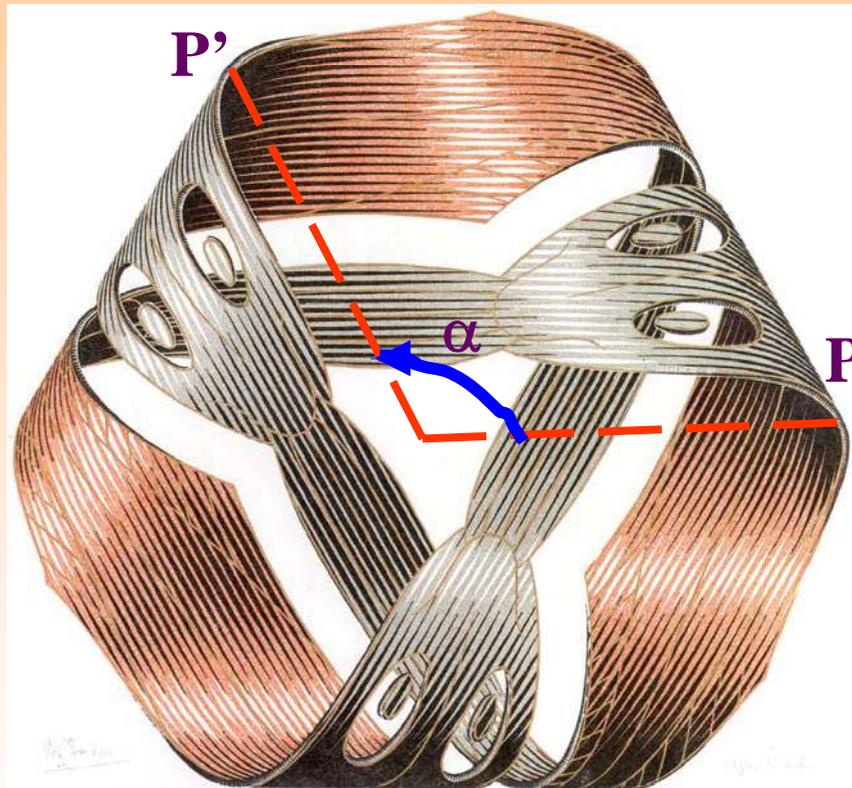
**SIMMETRIA DI TIPO BIDIMENSIONALE**

**I) ROTAZIONE + RIFLESSIONE (GRUPPO DIEDRICO)**

**II) ROTAZIONE (GRUPPO CICLICO)**



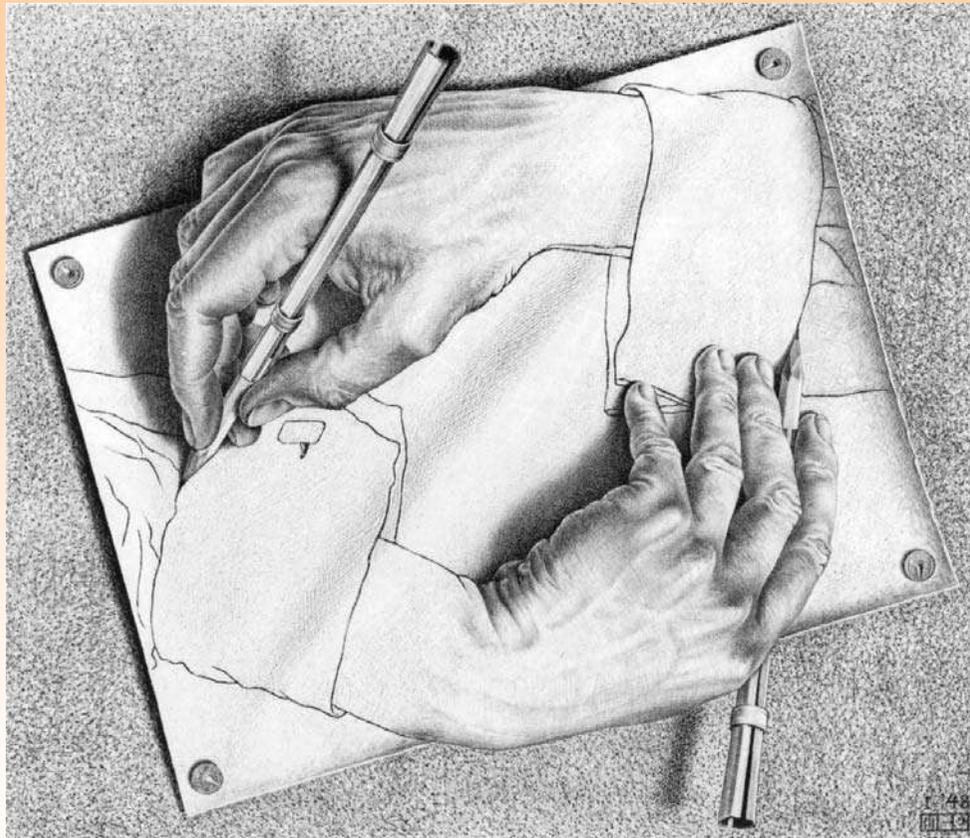
# SIMMETRIA ROTATORIA



VIOLAZIONE  
DELLA  
SIMMETRIA?

*ESCHER-NASTRO DI MOEBIUS*

# SIMMETRIA ROTATORIA



VIOLAZIONE  
DELLA  
SIMMETRIA?

*ESCHER*

Luigi Togliani - Simmetrie - 26/4/10

# ROSONI

**ROTAZIONE DI UN MOTIVO BASE B ATTORNO AD UN PUNTO**

**ROSONI** { **CICLICI B NON HA ASSE DI SIMMETRIA**  
**DIEDRALI B HA ASSE DI SIMMETRIA**

# ROSONE DIEDRALE

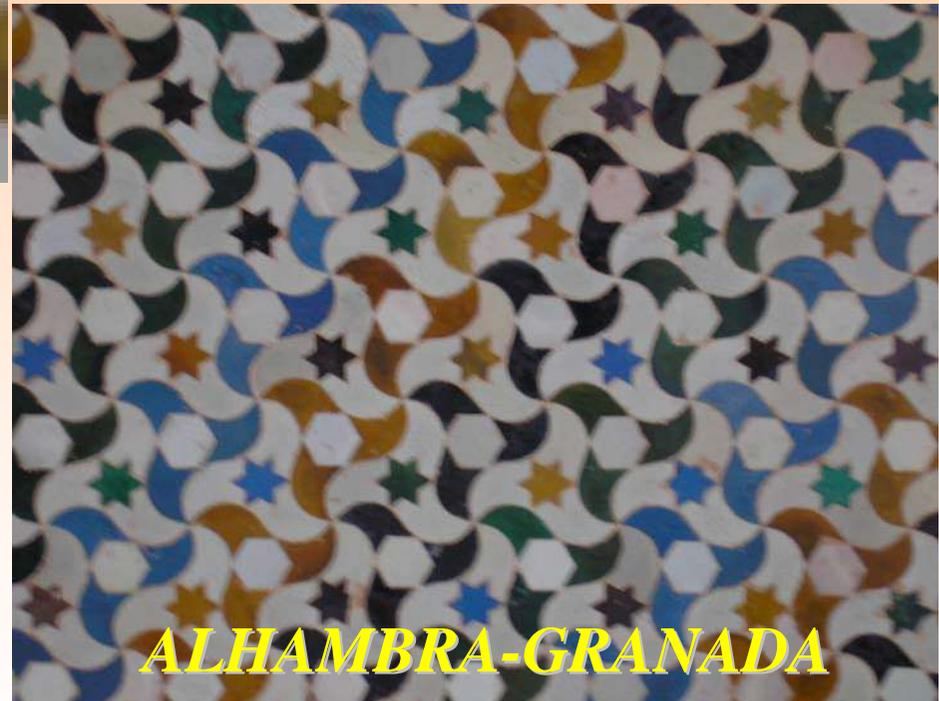


$\alpha = 360^\circ/8$   
rotazioni  
riflessioni

# ROSONE CICLICO

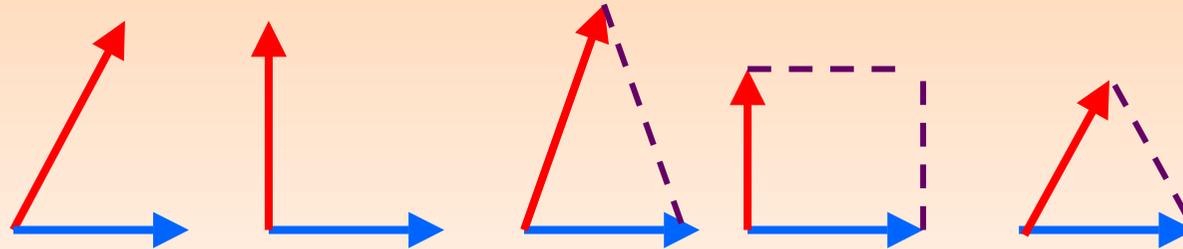


$\alpha = 360^\circ/3$   
rotazioni



# GRUPPI DI SIMMETRIE DEL PIANO

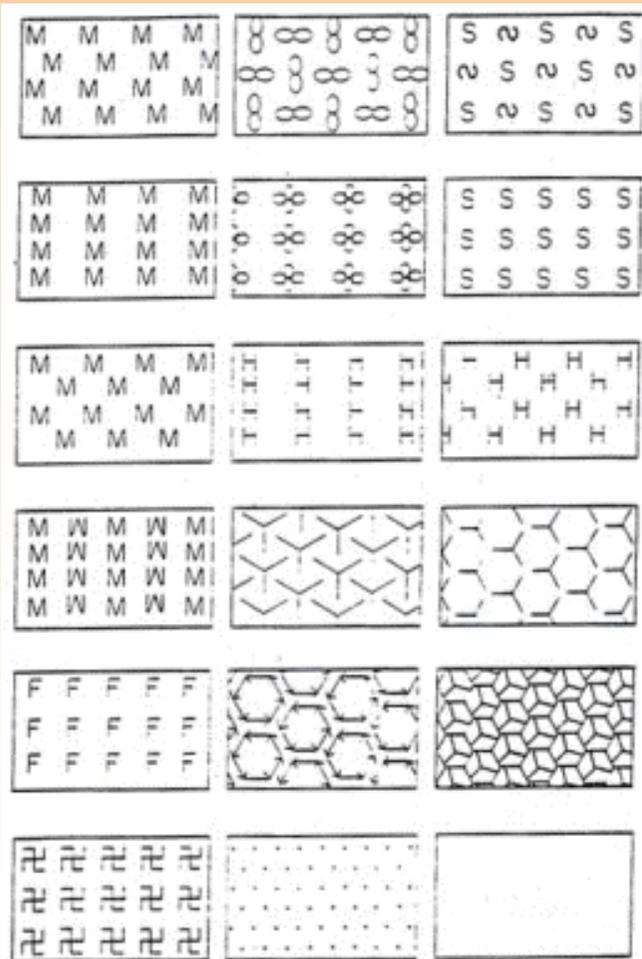
*GRUPPI GENERATI DA DUE TRASLAZIONI  
ASSOCIATE A VETTORI INDIPENDENTI*



*NEL PIANO SONO POSSIBILI SOLO 17 DIVERSI  
GRUPPI DI SIMMETRIE O 'PATTERN DESIGN' O  
GRUPPI CRISTALLOGRAFICI PIANI (E. FEDOROV  
1891 - G. POLYA, 1924)*

*RICOPRIMENTO DEL PIANO*

# GRUPPI DI SIMMETRIE DEL PIANO



**MODELLI DEI 17  
GRUPPI  
CRISTALLOGRAFICI  
PIANI**

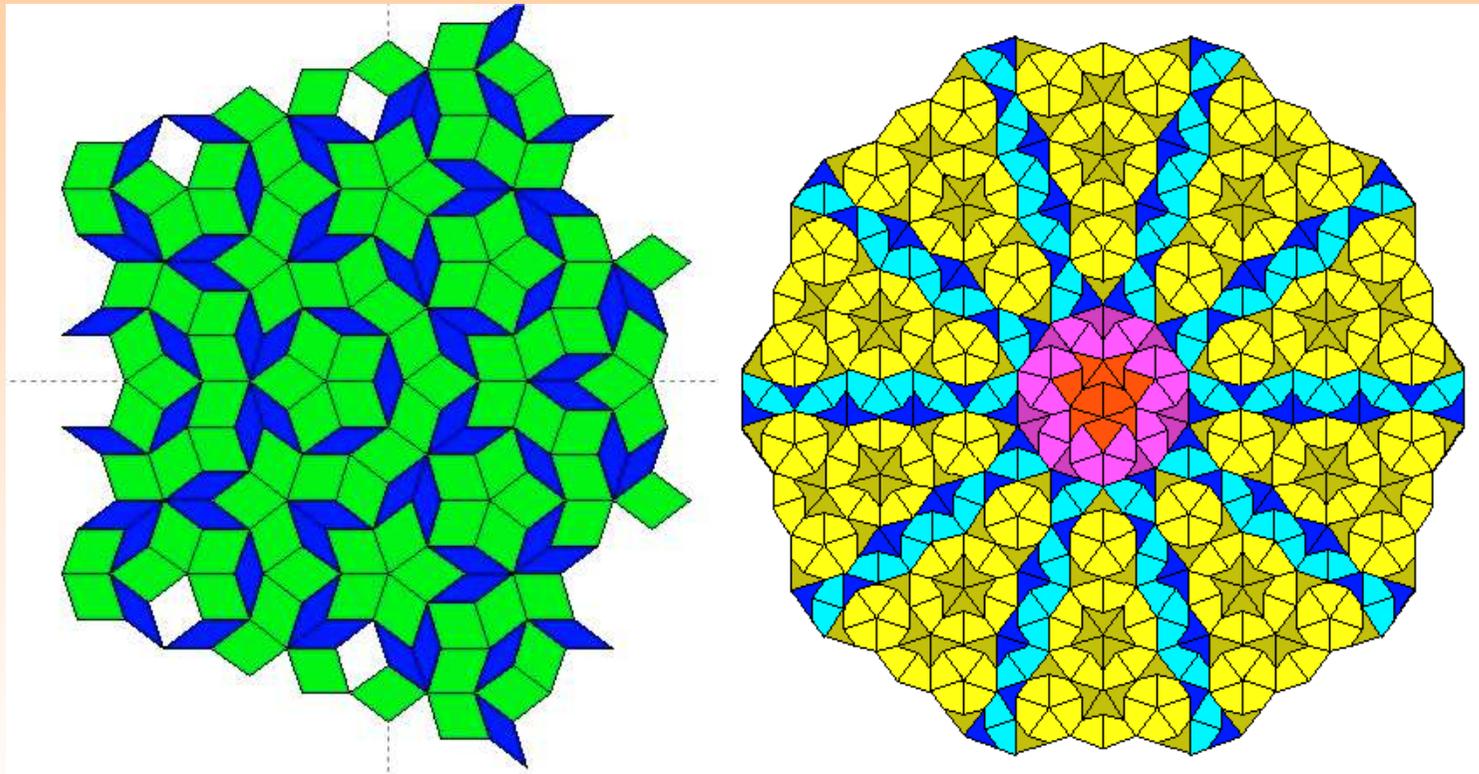
# MOSAICI dell'ALHAMBRA

J. M. MONTESINOS (1987): 17 gruppi all'Alhambra



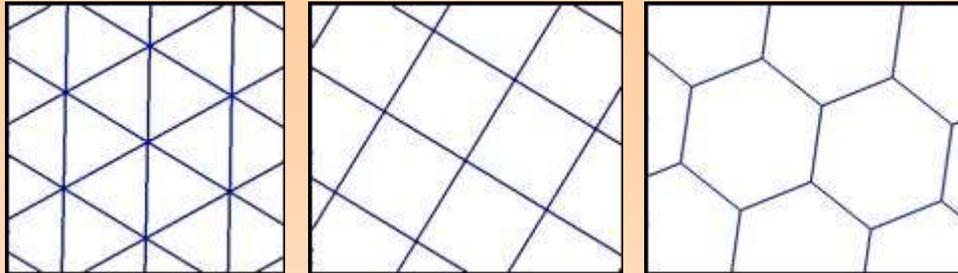
# TASSELLARE IL PIANO

In quanti modi è possibile tassellare il piano?

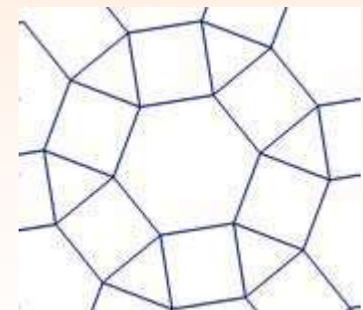
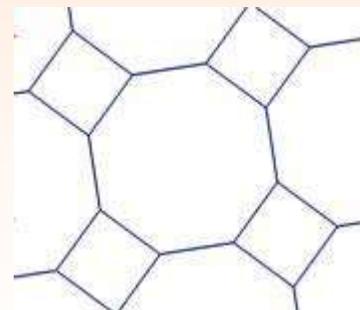
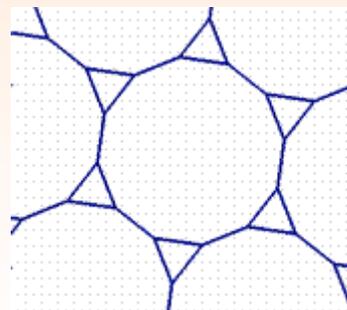
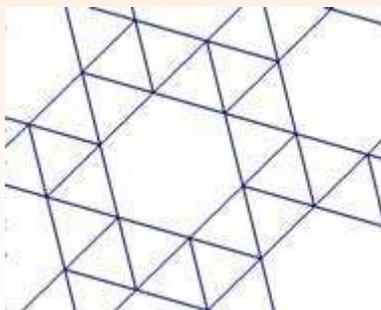
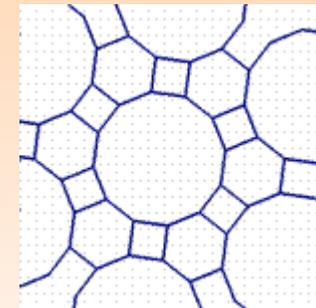
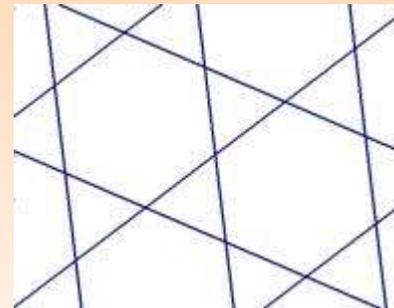
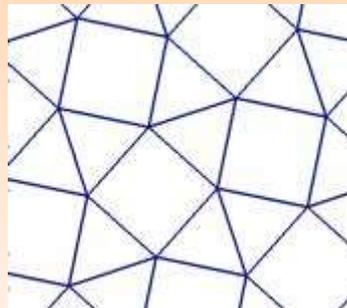


**Tassellature di Roger Penrose**

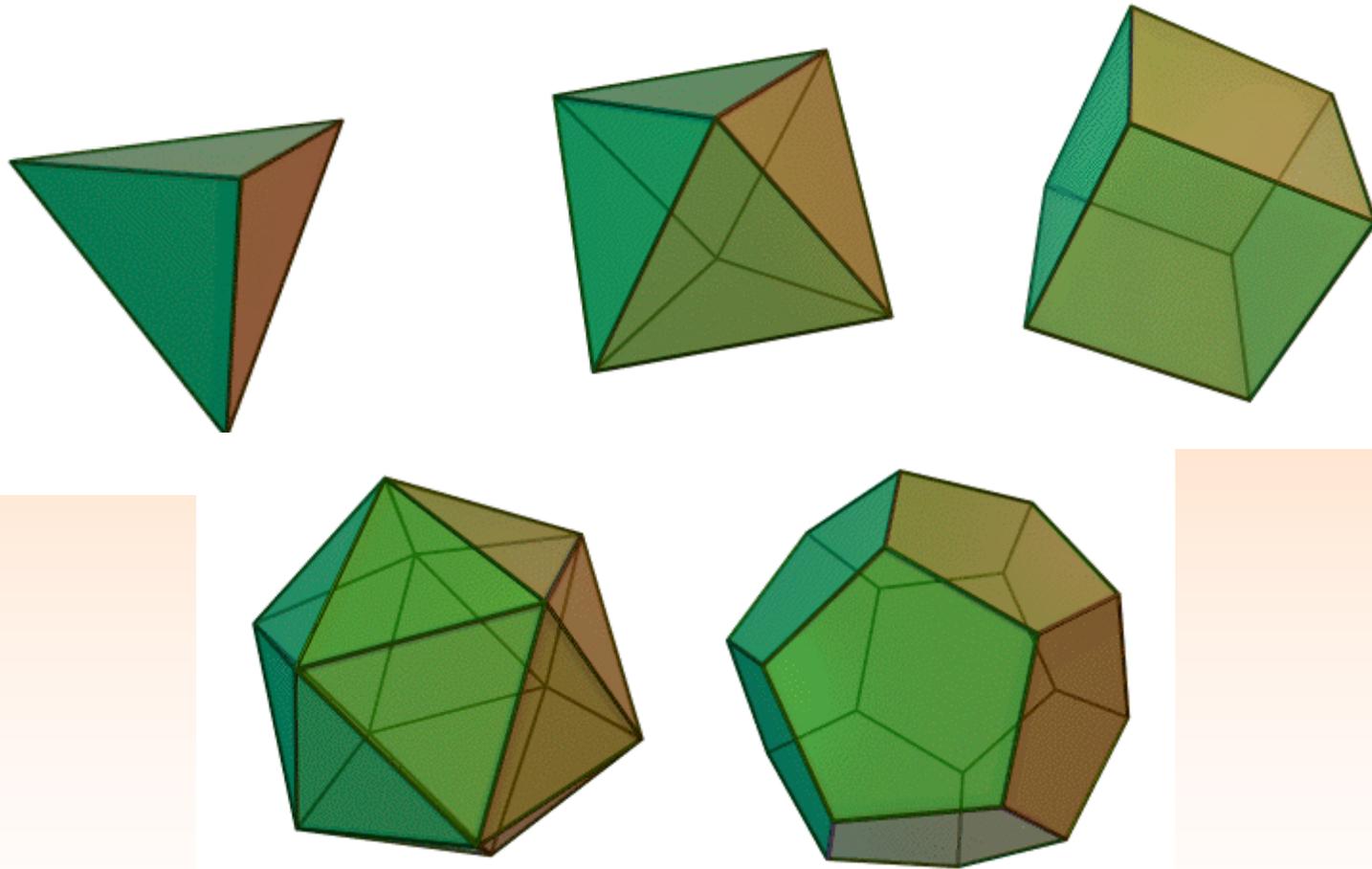
# TASSELLARE IL PIANO



... con l'uso di  
poligoni regolari



# POLIEDRI REGOLARI



# POLIEDRI REGOLARI

<b>solido</b>	<b>v</b>	<b>f</b>	<b>s</b>
tetraedro	4	4	6
esaedro	8	6	12
ottaedro	6	8	12
dodecaedro	20	12	30
icosaedro	12	20	30

$v + f = s + 2$  **Eulero**

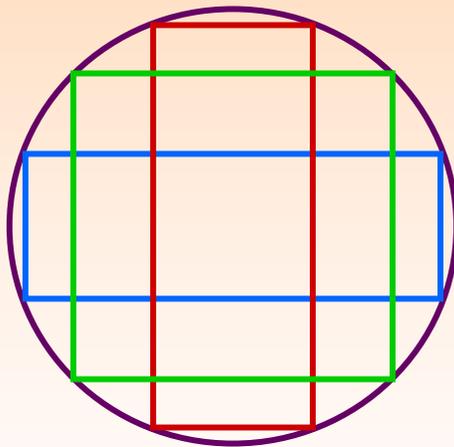
$v \leftrightarrow s$  **dualità poliedrale**

# SIMMETRIE TETRAEDRO

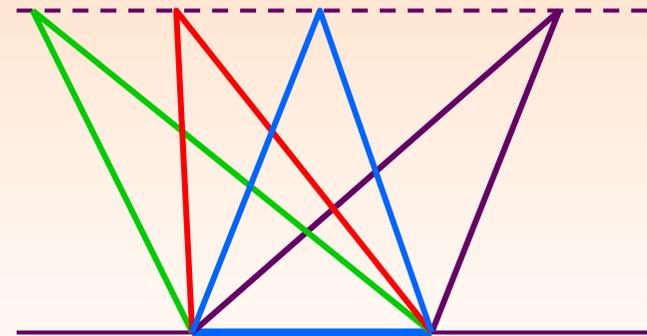
- **identità**
- **8 rotazioni** di ordine 3 (di angolo pari a  $k \cdot 120^\circ$ , con  $k=1,2$ ) dove i 4 assi passano per un vertice e sono perpendicolari alla faccia opposta
- **3 rotazioni** di ordine 2 (di angolo pari a  $180^\circ$ ), dove i 3 assi passano per i punti medi di due spigoli opposti
- **6 riflessioni** rispetto ai 6 piani passanti per uno spigolo e per il punto medio dello spigolo opposto
- **6 riflessioni rotatorie** che si ottengono componendo: una rotazione di un angolo di  $90^\circ + k \cdot 180^\circ$  con  $k=0,1$  seguita da una riflessione rispetto al piano perpendicolare all'asse di rotazione passante per il baricentro del tetraedro

# MAX/MIN E SIMMETRIE

*Fra tutti i rettangoli  
inscritti in un cerchio  
trova quello di area  
massima*



*Fra tutti i triangoli  
equiestesi di data  
base trova quello di  
perimetro minimo*





# SIMMETRIE: ALGEBRA E DINTORNI

# RELAZIONI E MATRICI

- RELAZIONI SIMMETRICHE

$$aRb \Rightarrow bRa \quad \forall a, b \in A$$

T	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

- MATRICI (QUADRATE)

## SIMMETRICHE

$$a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i, j \in A$$

a	b	c
b	d	e
c	e	f

# GRUPPO

Se  $(A, T)$  è struttura algebrica avente le proprietà:

- $(x T y) T z = x T (y T z) \quad \forall x, y, z \in A$  **associativa**
- $\exists e \in A : x T e = e T x \quad \forall e \in A$  **elemento neutro**
- $\forall x \in A \exists x' \in A : x T x' = x' T x = e$  **simmetrico di  $x$**

si dice che  $(A, T)$  è un gruppo. Se inoltre:

- $x T y = y T x \quad \forall x, y, z \in A$  **commutativa**

il gruppo è abeliano.

# EQUAZIONI

- EQUAZIONI SIMMETRICHE

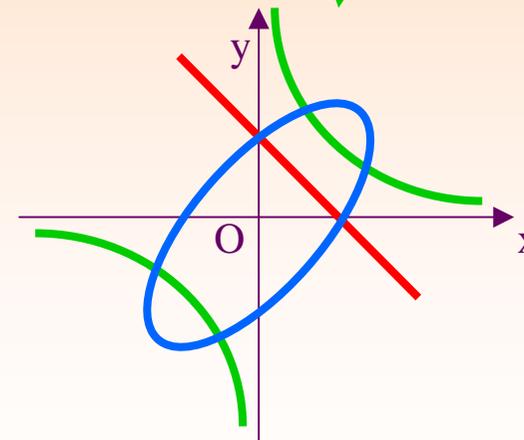
$$ax^2 + bxy + ay^2 = 0$$

- SISTEMI SIMMETRICI

$$\begin{cases} x + y = s \\ x y = p \end{cases}$$

simmetria 'algebraica'  
simmetria 'geometrica'

*Interpretazione  
analitica - piano  
cartesiano*



# PALINDROMIA

2002      80008      AMA      ANNA

ANILINA    INGEGNI    OTTETTO  
ONORARONO    RADAR

ENOTECA ↔ ACETONE (BIFRONTE)

# PALINDROMIA

EN GIRO TORTE SOL CICLOS ET ROTOR IGNE



**BATTISTERO FIRENZE**

punto del pavimento  
illuminato a mezzogiorno  
del giorno in cui il Sole  
entra nella costellazione  
del Cancro

scritta letta in senso orario  
o antiorario

rosone ciclico

# PALINDROMIA

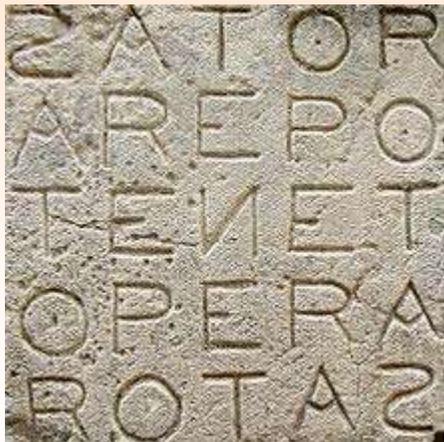
**TORTE SOL CICLOS  
EN GIRO ET ROTOR IGNE**

# PALINDROMIA

SATOR AREPO TENET OPERA ROTAS

SI TROVA A POMPEI, A ROMA - S. MARIA  
MAGGIORE, A VENEZIA - PALAZZO BENCIOLIN, A  
SIENA - S. MARIA DELLA SCALA...

*IL SEMINATORE, COL SUO ARATRO, TIENE CON  
CURA LE RUOTE oppure DIO, DAL SUO TRONO,  
REGOLA CON SAGGEZZA LE SFERE (UNIVERSO)*



*quadrato 'magico' con:  
simmetrie assiali  
simmetria centrale*



# SIMMETRIE: FISICA

# SIMMETRIE IN FISICA

**Simmetria geometrica:** simmetria della configurazione di un sistema ad un certo istante. Es.: oggetto sferico che ruota attorno ad un suo diametro.

**Simmetria dinamica (o fisica):** è data da una legge di corrispondenza tra le configurazioni di un sistema, legge che si conserva nel tempo; il *comportamento* del sistema è simmetrico. Es.: disco a ghiaccio secco che slitta su piano orizzontale ha simmetria fisica per traslazioni sul piano. In particolare si chiama **simmetria euclidea** quella che vale per traslazioni e per rotazioni qualsiasi; è tipica di un sistema isolato (es. Sole e Terra).

# SIMMETRIE IN FISICA

La presenza di una simmetria in un sistema fisico è la conseguenza delle proprietà:

- le forze interne al sistema sono invarianti rispetto alla simmetria;
- lo spazio in cui si trova il sistema è simmetrico.

Conseguenze della simmetria euclidea:

- le leggi fisiche sono le stesse in qualunque luogo (non dipendono dal riferimento inerziale scelto) e quindi sono invarianti per riflessioni, cioè per parità.

Quest'ultima affermazione viene negata dalla Fisica contemporanea (dal 1957 in poi). Si parla di **rottura della simmetria**.

Vedi: F. Strocchi: “*Simmetrie e rotture di simmetrie in Fisica*”

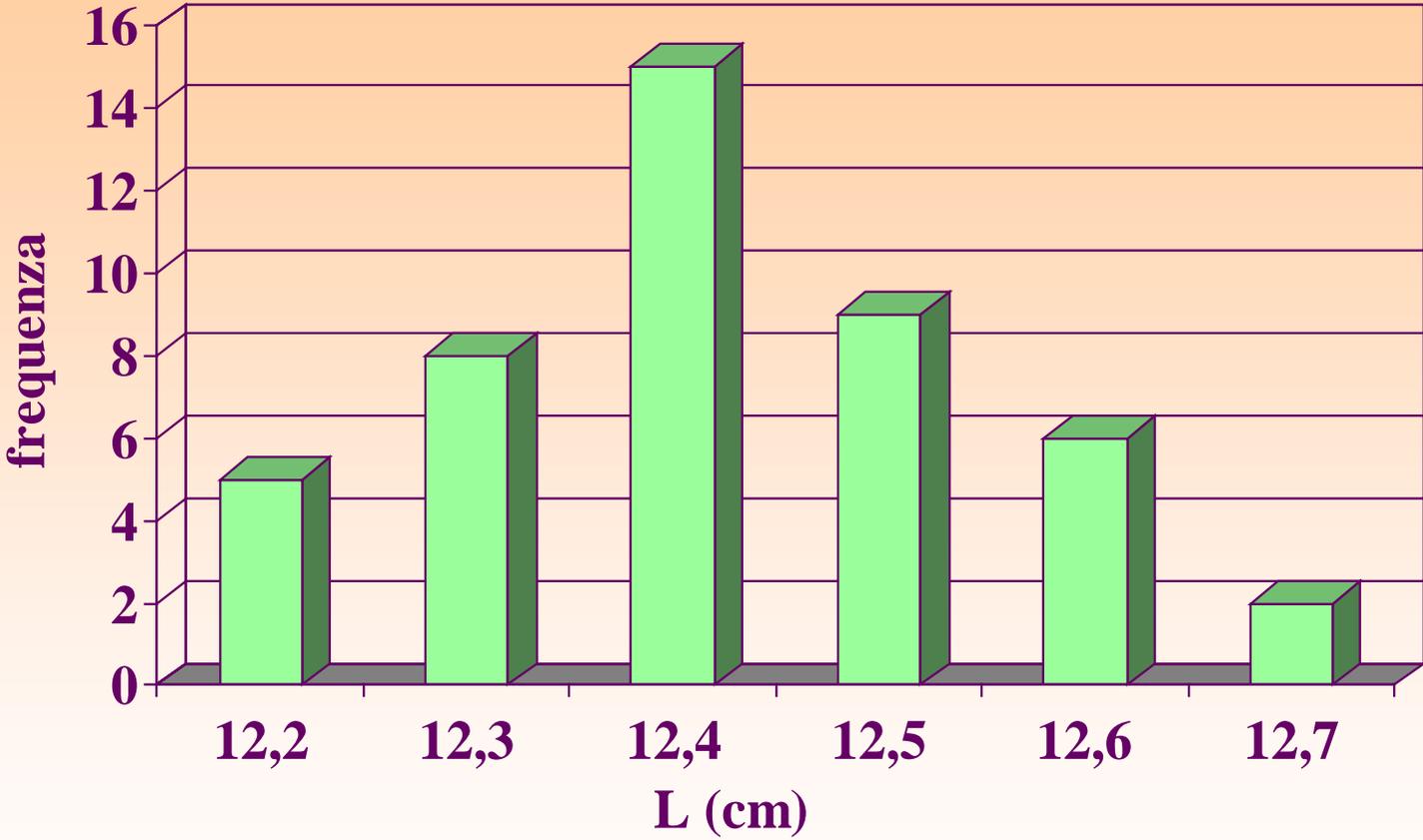
# GAUSSIANA

## *RIPETIZIONE DI UNA STESSA MISURA*

**L (cm)**

12,5	12,4	12,6	12,4	12,2	12,7	12,6	12,5	12,4
12,2	12,3	12,4	12,4	12,5	12,3	12,6	12,2	12,3
12,4	12,5	12,4	12,5	12,3	12,3	12,6	12,5	12,4
12,5	12,2	12,4	12,4	12,3	12,5	12,4	12,6	12,4
12,4	12,5	12,4	12,3	12,6	12,7	12,2	12,4	12,3

# GAUSSIANA

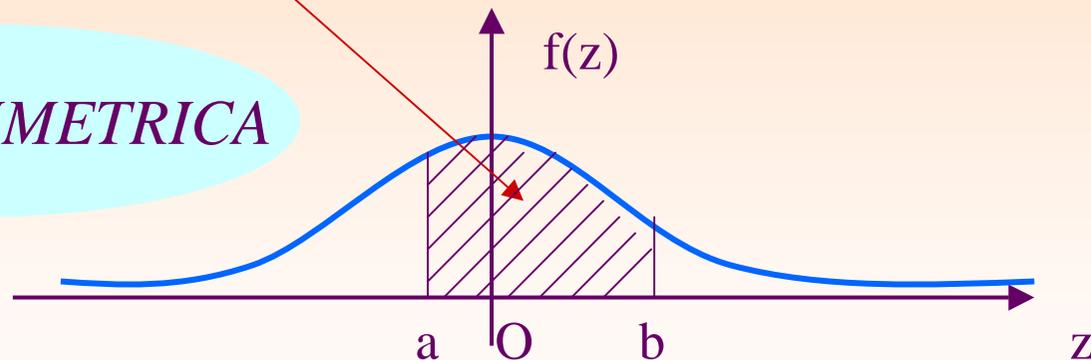


# GAUSSIANA

La **probabilità** risulta:

$$P(a \leq Z \leq b) = \int_a^b f(z) dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

*CURVA SIMMETRICA*



# GAUSSIANA

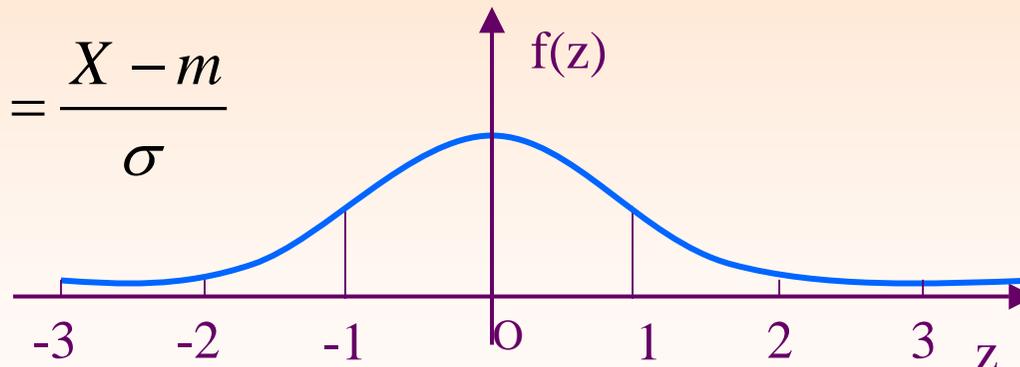
Regola dei tre sigma:

$$P(-\sigma + m < X < \sigma + m) = 2P(0 \leq Z < 1) \cong 68,3\%$$

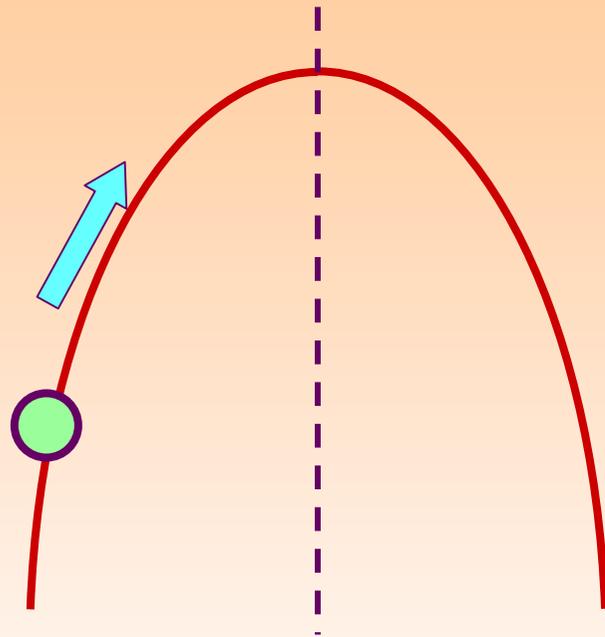
$$P(-2\sigma + m < X < 2\sigma + m) = 2P(0 \leq Z < 2) \cong 95,4\%$$

$$P(-3\sigma + m < X < 3\sigma + m) = 2P(0 \leq Z < 3) \cong 99,7\%$$

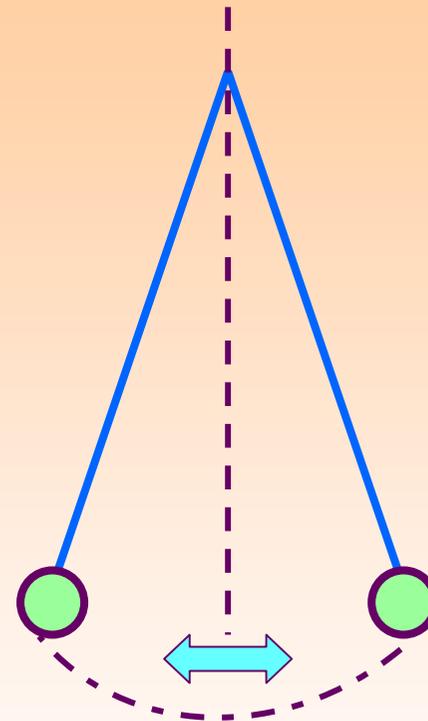
con  $Z = \frac{X - m}{\sigma}$



# MOTO E SIMMETRIA



**NON INVARIANTE PER  
INVERSIONE TEMPORALE**



**QUASI INVARIANTE PER  
INVERSIONE TEMPORALE**

# SIMMETRIA e RELATIVITÀ

*Se due fisici A e B fanno esperimenti in due diversi riferimenti inerziali, non è possibile riconoscere A da B in base solo alla lettura dei risultati dei loro esperimenti.*

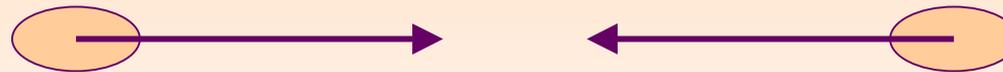
Vedi Galileo, *Dialogo sui massimi sistemi*, 1632

Quindi le leggi della Fisica sono le stesse rispetto a qualunque riferimento inerziale (Einstein, relatività ristretta) ma anche rispetto a **qualunque riferimento** (Einstein, relatività generale): *“Tutti i corpi di riferimento sono equivalenti ai fini della descrizione dei fenomeni naturali, qualunque possa essere il loro stato di moto”*.

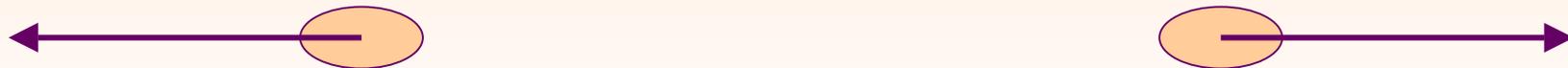
# FORZE

## PRINCIPIO DI AZIONE E REAZIONE

SE A ESERCITA UNA FORZA  $\underline{F}$  SU B , ALLORA  
B ESERCITA UNA FORZA  $-\underline{F}$  SU A



*ATTRAZIONE*



*REPULSIONE*

# FORZE

## LEGGE DI GRAVITAZIONE UNIVERSALE



$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

solo attrazione

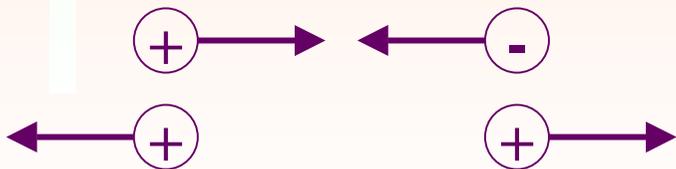
*azione e  
reazione*

*equazioni  
simmetriche*

## LEGGE DI COULOMB

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

attrazione o repulsione



# FORZE

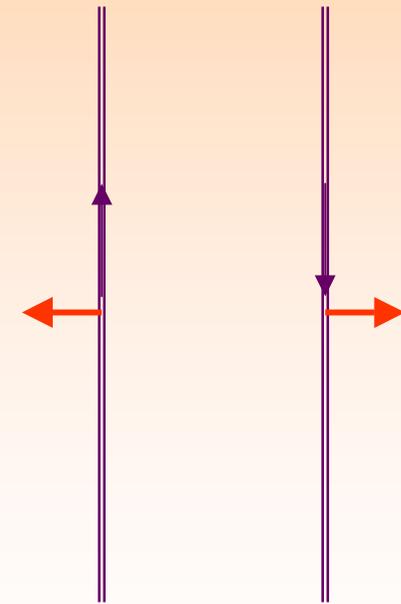
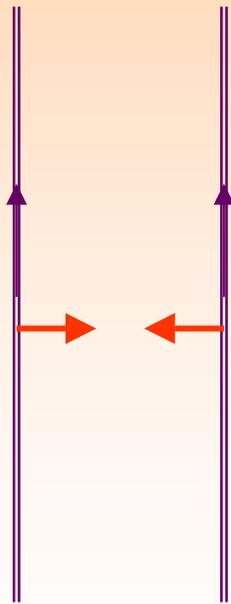
## INTERAZIONI TRA CORRENTI ELETTRICHE

$$F = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 I_2 l}{d}$$

*azione e  
reazione*

*equazione  
simmetrica*

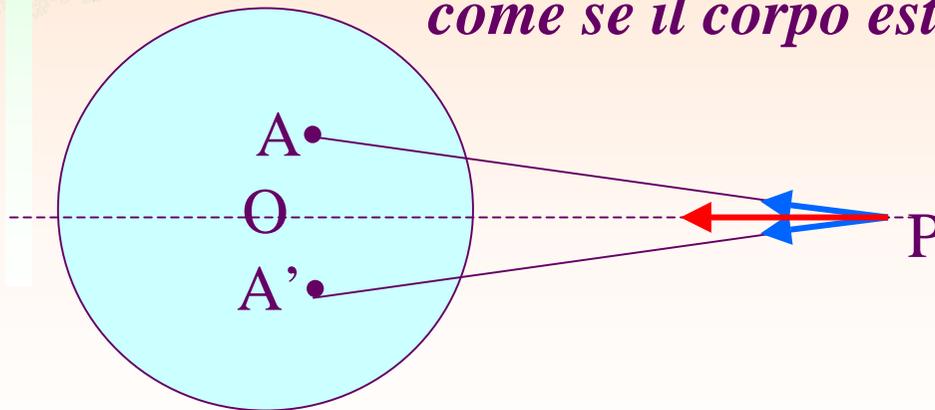
attrazione o repulsione



# FORZE

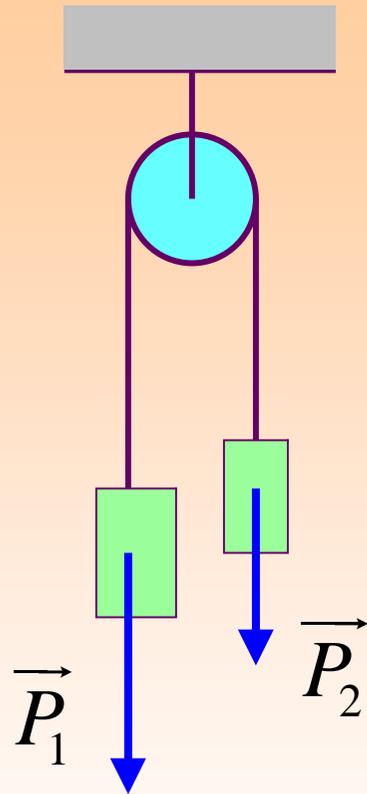
## FORZE GRAVITAZIONALI ESERCITATE DA UN CORPO ESTESO SFERICO (di centro $O$ )

*Un punto materiale  $A$  del corpo esercita una forza  $\underline{F}$  su un punto materiale  $P$  esterno;  $A'$  simmetrico di  $A$  rispetto alla congiungente  $PO$  esercita la forza  $\underline{F}'$  su  $P$ ; la risultante di  $\underline{F}$  e di  $\underline{F}'$  va da  $P$  a  $O$ . E' come se il corpo esteso si concentrasse in  $O$ .*



Vedi: C. Bernardini, “*Che cos'è un legge fisica*”, Ed. Riuniti, 1983

# MACCHINA DI ATWOOD



**ACCELERAZIONE  
DEL SISTEMA:**

$$a = \frac{|m_1 - m_2| g}{(m_1 + m_2)}$$

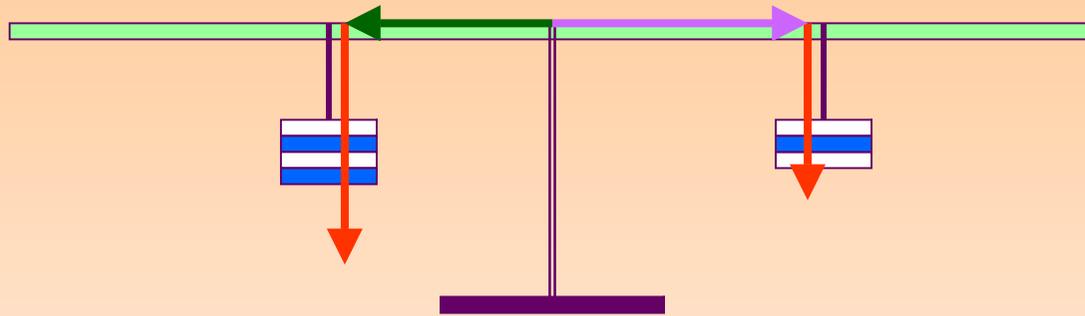
*equazione  
simmetrica*



**CHE COSA ACCADE:**

- **SE SCAMBIO I DUE OGGETTI?**
- **SE  $m_1 = m_2$ ?**

# ASTA IN EQUILIBRIO

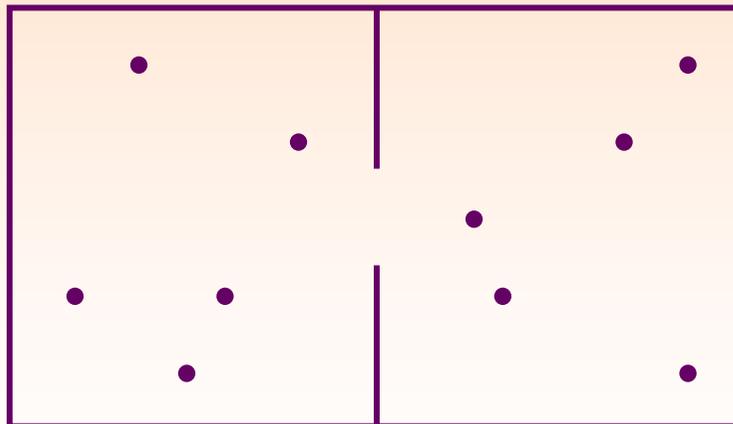
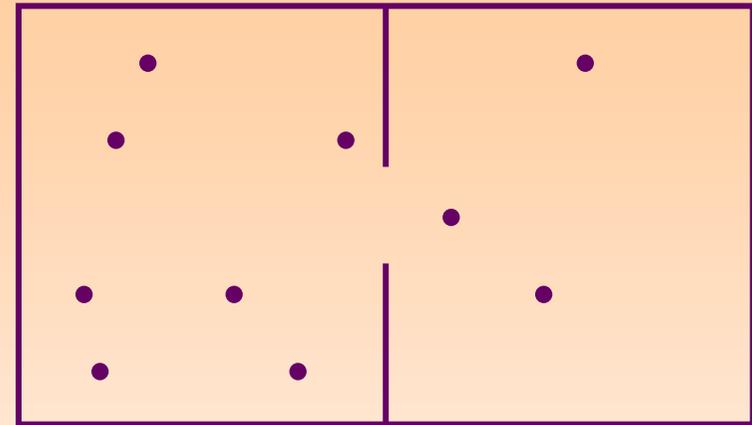
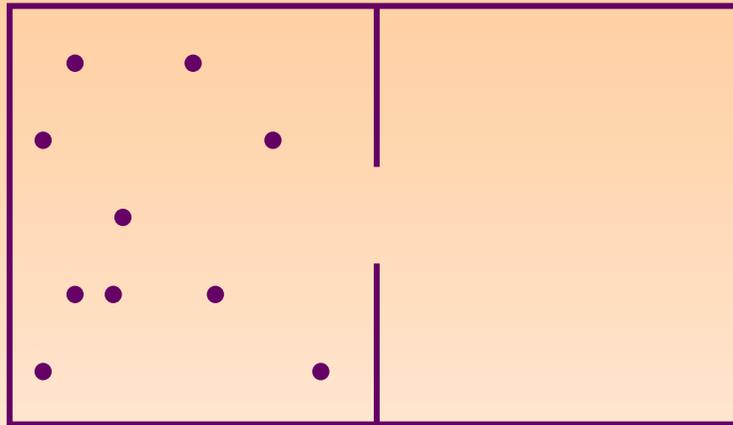


$$\vec{r}_1 \times \vec{P}_1 = -\vec{r}_2 \times \vec{P}_2$$

# SIMMETRIE E BARICENTRO

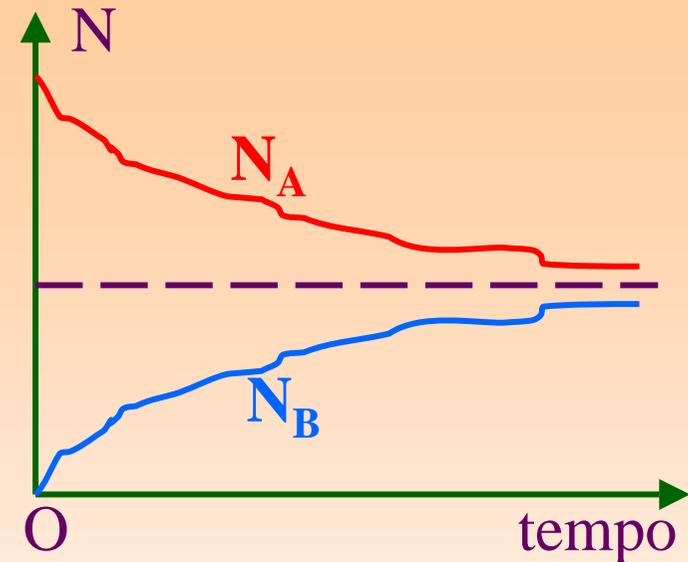
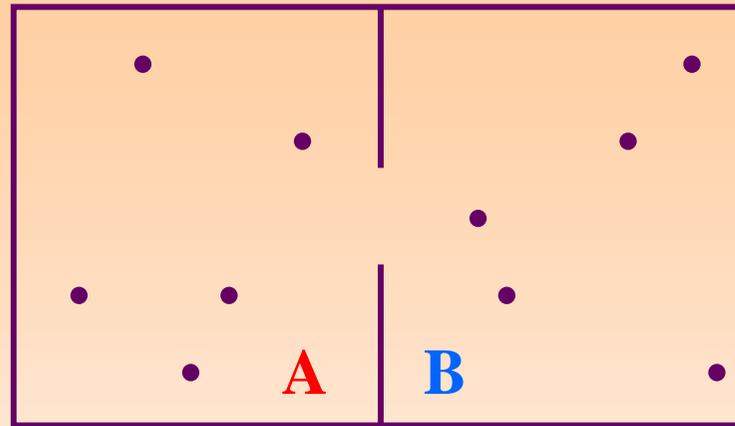


# DIFFUSIONE DI UN GAS



**IL SISTEMA EVOLVE  
VERSO LO STATO DI  
MAX PROBABILITA'  
(SIMMETRIA)**

# DIFFUSIONE DI UN GAS

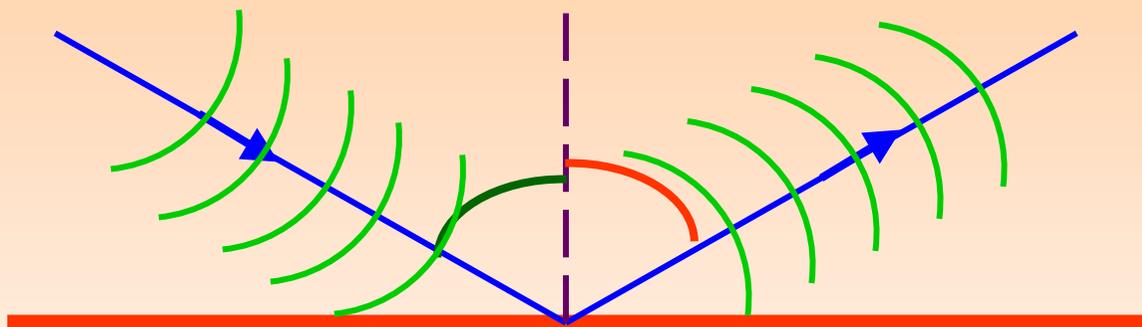


LE MOLECOLE DEL GAS TENDONO A DISTRIBUIRSI  
UNIFORMEMENTE NEI DUE RECIPIENTI

**SIMMETRIA GEOMETRICA, MA**  
**IRREVERSIBILITA' DEL FENOMENO**

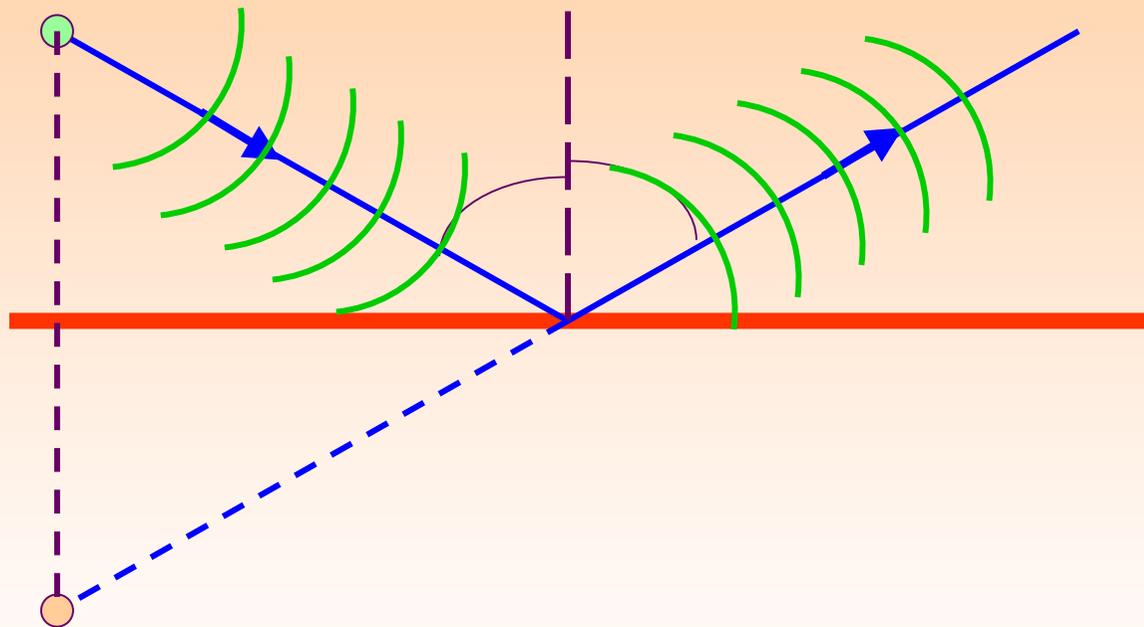
# RIFLESSIONE

angolo di incidenza = angolo di riflessione



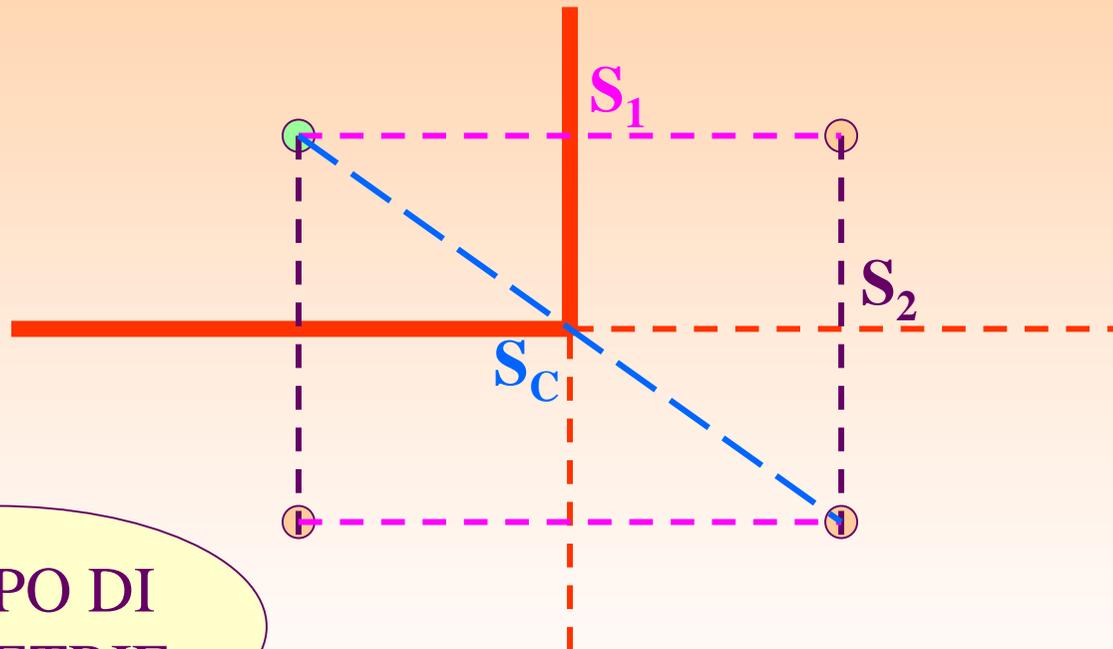
# RIFLESSIONE

## COSTRUZIONE DELL'IMMAGINE (VIRTUALE)



# RIFLESSIONE della LUCE

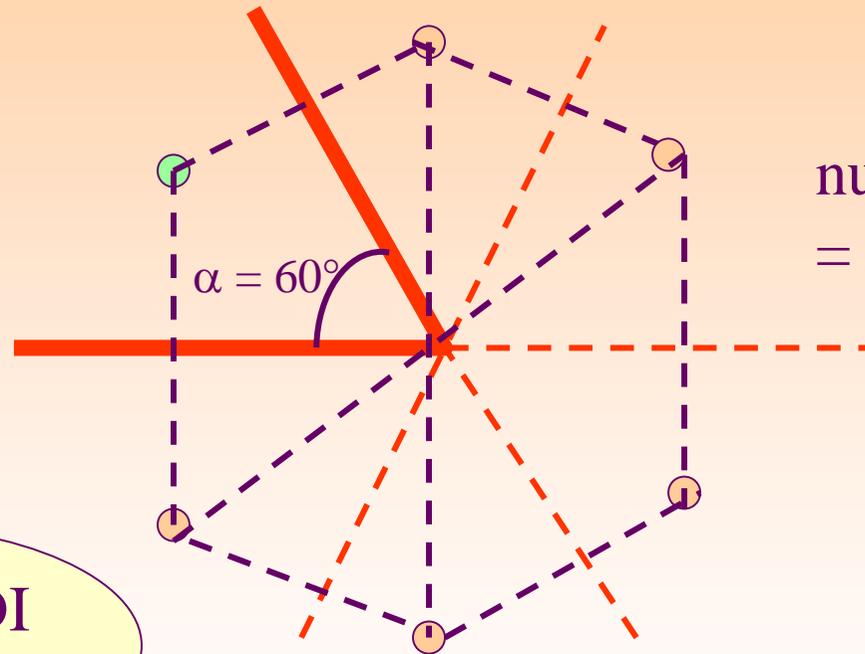
## IMMAGINI (VIRTUALI) CON DUE SPECCHI



GRUPPO DI  
SIMMETRIE

# RIFLESSIONE della LUCE

## IMMAGINI (VIRTUALI) CON DUE SPECCHI

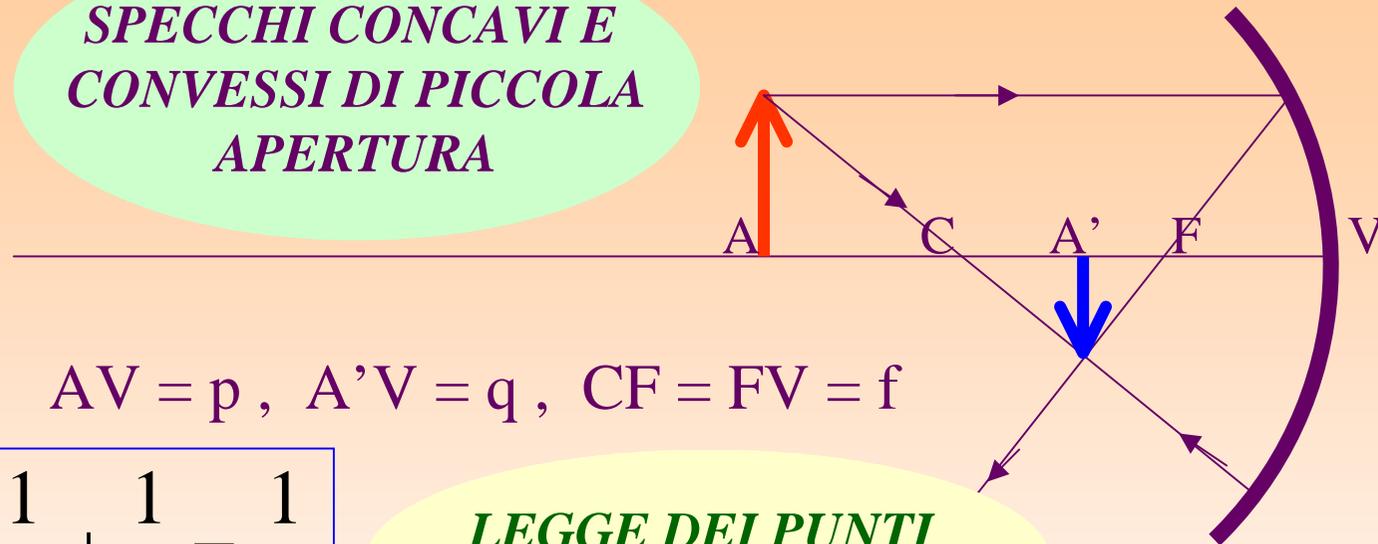


$$\begin{aligned} \text{num\_immagini} &= \\ &= 360^\circ/\alpha - 1 \end{aligned}$$

GRUPPO DI  
SIMMETRIE

# SPECCHI SFERICI (PARABOLICI)

*SPECCHI CONCAVI E  
CONVESSI DI PICCOLA  
APERTURA*



$$AV = p, A'V = q, CF = FV = f$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$$

*LEGGE DEI PUNTI  
CONIUGATI*

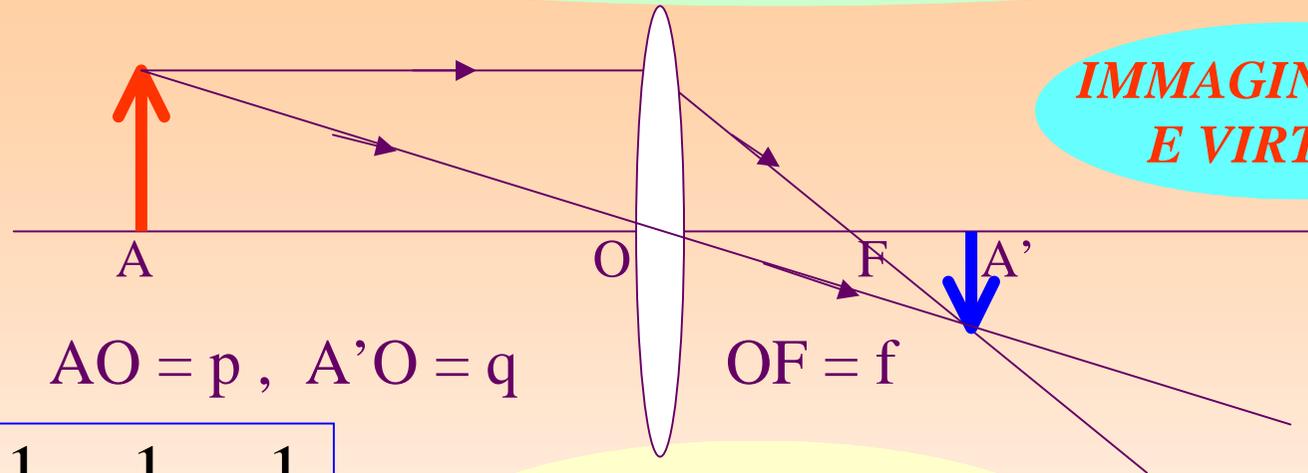
*IMMAGINI REALI  
E VIRTUALI*

*EQUAZIONE  
SIMMETRICA*

*SCAMBIO OGGETTO-IMMAGINE  
RECIPROCIÀ CAMMINO OTTICO*

# LENTI SFERICHE

*LENTI SOTTILI  
CONVERGENTI E DIVERGENTI*



*IMMAGINI REALI  
E VIRTUALI*

$$AO = p, A'O = q$$

$$OF = f$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$$

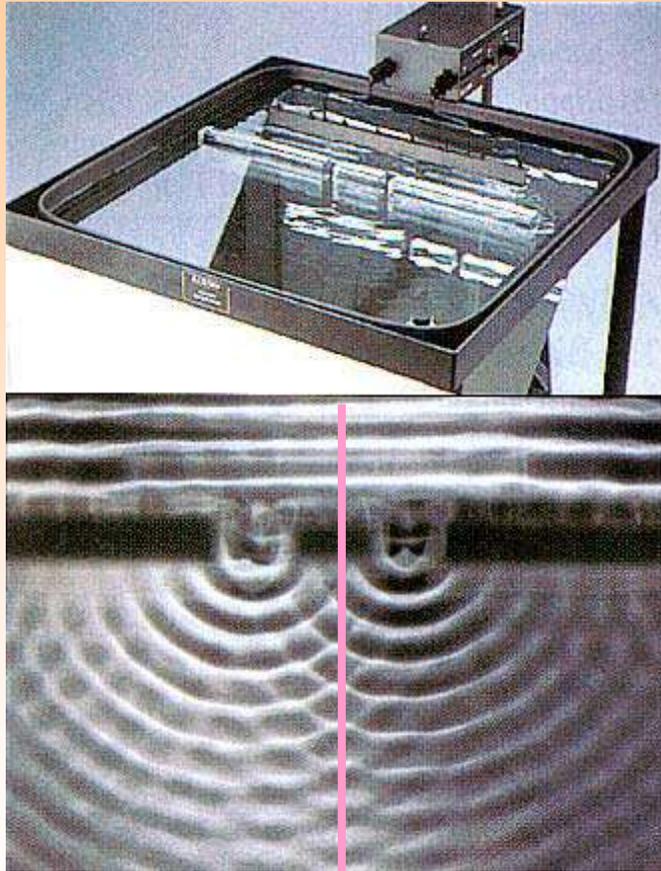
*LEGGE DEI PUNTI  
CONIUGATI*

*EQUAZIONE  
SIMMETRICA*

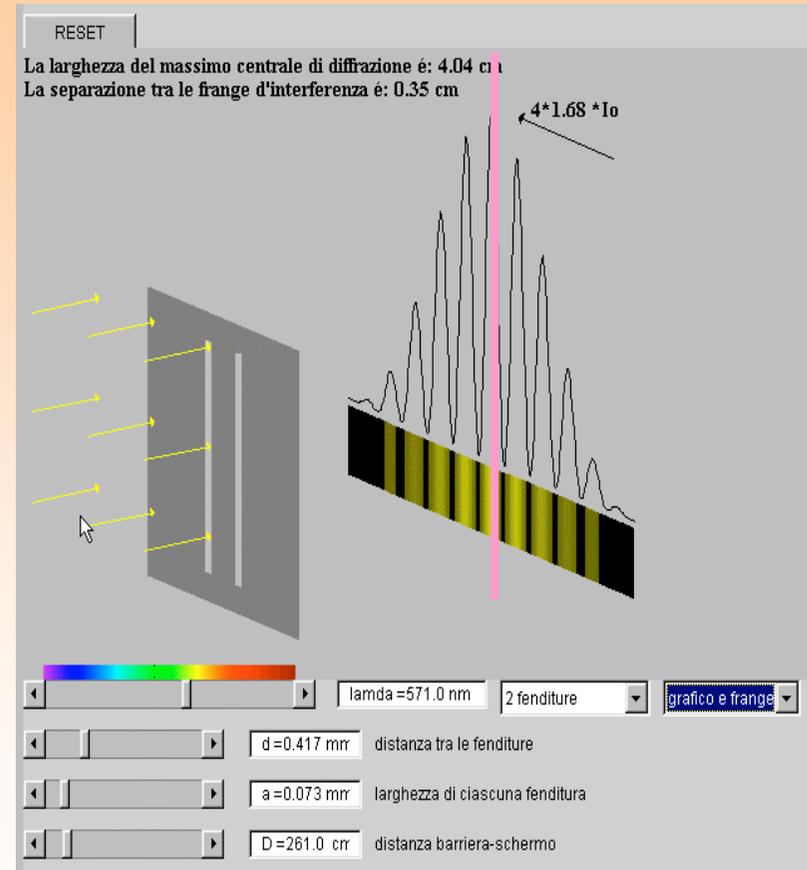
*SCAMBIO OGGETTO-IMMAGINE  
RECIPROCIÀ CAMMINO OTTICO*

# INTERFERENZA

## ONDE SUPERFICIALI

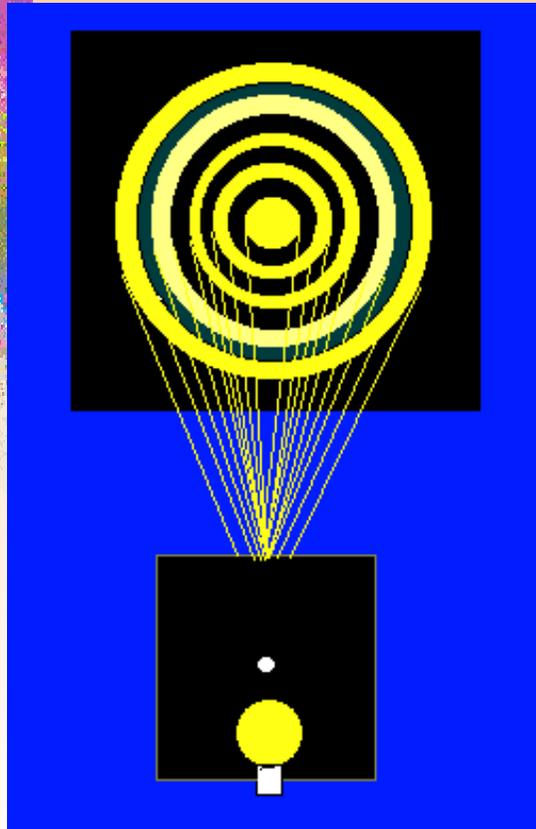


## LUCE



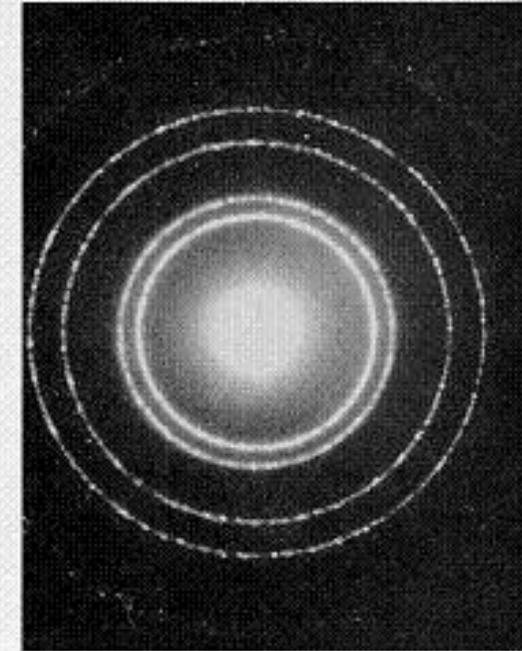
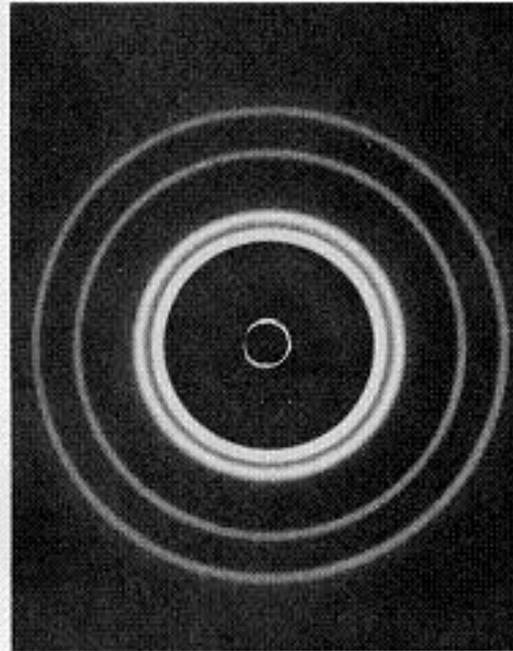
# DIFFRAZIONE

LUCE



RAGGI X

The diffraction pattern on the left was made by a beam of x rays passing through thin aluminum foil. The diffraction pattern on the right was made by a beam of electrons passing through the same foil.



ELETTRONI

# EQUAZIONI DI MAXWELL

$$\Phi_s(\vec{E}) = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\Phi_s(\vec{B}) = 0$$

$$C_l(\vec{E}) = -\frac{d\Phi_s(\vec{B})}{dt}$$

$$C_l(\vec{B}) = \mu_0 \left( i + \epsilon_0 \frac{d\Phi_s(\vec{E})}{dt} \right)$$

**CAMPO ELETTRICO - CAMPO MAGNETICO**

**FLUSSO - CIRCUITAZIONE**

**ALTERAZIONE DELLA SIMMETRIA**

# EQUAZIONI DI MAXWELL

$$\Phi_S(\vec{E}) = 0$$

$$\Phi_S(\vec{B}) = 0$$

$$C_l(\vec{E}) = -\frac{d\Phi_S(\vec{B})}{dt}$$

$$C_l(\vec{B}) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_S(\vec{E})}{dt}$$

**CAMPO ELETTRICO - CAMPO MAGNETICO**

**FLUSSO - CIRCUITAZIONE**

**RIPRISTINO DELLA SIMMETRIA**

*se  $q = 0$  e se  $i = 0$  (assenza di cariche e di correnti)*

# BIBLIOGRAFIA

H. Weyl - *Le simmetrie*, Feltrinelli, MI, 1975

R. Betti - *Simmetria: una scoperta matematica*, Polipress, MI, 2007

P. Vighi - *L'uso di mediatori artistici e informatici per l'insegnamento della Geometria*, R. M. U., PR, 2000

M. Gilardi - *I pattern design e i loro gruppi*, *Periodico di matematiche*, RM, 1987

B. Grunbaum - *What symmetry groups are present in the Alhambra?*, *Notices of the AMS*, 2006

<http://mathworld.wolfram.com>

<http://matdidattica.altervista.org/materiali/Geogebra/>

# BIBLIOGRAFIA

C. Bernardini - *Che cos'è una legge fisica*, Ed. Riuniti, RM, 1983

F. Strocchi - *Simmetrie e rotture di simmetrie in Fisica*,  
[www.crm.sns.it/publications/download/mis\\_conti/simm02.pdf](http://www.crm.sns.it/publications/download/mis_conti/simm02.pdf)

E. Fabri - *Insegnare relatività nel XXI secolo*, Quaderno 16 de *La Fisica nella scuola*, MO, 2005

A. Einstein - *Relatività: esposizione divulgativa*, Bollati Boringhieri, TO, 2001

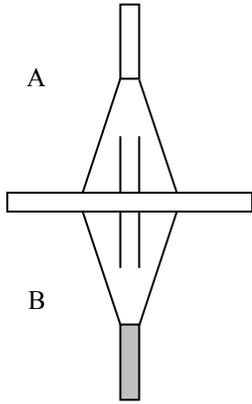
## SIMMETRIE

26 aprile '10 – Liceo Scientifico Belfiore Mantova – Luigi Togliani

### Esperimento: “Simulazione della diffusione di un gas”

#### a) *Uso del doppio imbuto*

Usiamo un dispositivo molto semplice, ideato nel 1979 dal prof. Ettore Orlandini. Lo strumento è costituito da due imbuto uguali di plastica trasparente i cui cannelli sono due cilindri graduati ricavati da due siringhe. Le basi degli imbuto sono fissate sulle due facce di una tavoletta di plexiglas. Nel foro della tavoletta è infilato un tubicino che sporge in egual misura in ogni imbuto. Il cilindro dell'imbuto inferiore (imbuto A) è riempito di pallini di piombo (vd figura). Per fare l'esperienza si capovolge una gran numero di volte il dispositivo. Ad ogni capovolgimento ciascun pallino ha la stessa probabilità di passare per il tubicino.



Fate fare al doppio imbuto una ventina di capovolgimenti doppi (in modo da ritornare, alla fine di ognuno, alla posizione di partenza del dispositivo), registrando ogni volta il volume occupato dai pallini nel gambo dell'imbuto A inizialmente pieno. Che cosa osservate?

Tracciate un diagramma a strisce che riporti in ascisse il numero dei lanci effettuati ed in ordinate i ‘volumi di pallini’ nei recipienti A e B. Che cosa si può concludere?

In che modo questa esperienza può simulare il comportamento di un gas?

#### b) *Uso dei dadi*

Ogni gruppo disegna un rettangolo diviso in due settori uguali A e B, in uno dei quali (settore A) colloca 20 pedine numerate da 1 a 20. Poi viene lanciato un dado icosaedrico e si sposta di settore la pedina avente lo stesso numero dell'uscita del lancio. Si procede nella stessa maniera con una ventina di lanci, annotando ogni volta il numero di pedine rimaste nel settore A di partenza. Che cosa concludete, anche dal confronto tra i vari gruppi? In che modo questa esperienza può simulare il comportamento di un gas?

### Esperimento: “Macchina di Atwood”

Si fissa la puleggia ad uno stativo e si fa passare un filo nella gola della puleggia. Alle estremità del filo appendiamo dei dischi metallici tramite appositi piattelli. Che cosa accade se le masse appese sono uguali da entrambi i lati? E se sono diverse? Per studiare il moto della macchina si può usare un sistema on line dotato di sensore di moto (sonar), interfaccia e calcolatrice adatta allo scopo. Il file salvato può essere analizzato al PC tramite apposito software.

### Esperimento: “Specchio piano”

Ponete uno specchio piano in posizione verticale. Mettete un chiodo appoggiato sulla testa a circa 10 cm di distanza dallo specchio e cercate di prevedere dove si trova l'immagine del chiodo. Guardando chiodo e immagine spostate lateralmente la testa: che cosa osservate? Ora determinate la posizione dell'immagine ponendo un secondo chiodo, uguale al primo, in un punto in cui il chiodo ‘prosegua’ esattamente l'immagine riflessa sullo specchio in qualunque posizione vi mettiate ad osservare. Segnate posizione dell'oggetto, dello specchio e dell'immagine. Ripetete la stessa esperienza cambiando la posizione dell'oggetto. Che cosa potete concludere?

Ora mettete due specchi piani in posizione verticale in modo da formare un angolo  $\alpha$  tra loro e individuate le immagini e le loro posizioni. Date ad  $\alpha$  valori particolari tipo:  $90^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $30^\circ$ , ... Quante immagini trovate in ciascun caso? Si può trovare una regola che fornisce il numero delle immagini al variare di  $\alpha$  ?