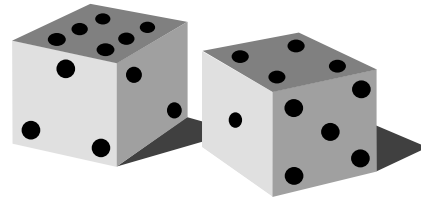


INTRODUZIONE ALLA PROBABILITÀ

Luigi Togliani

Liceo Scientifico "Belfiore" - Mantova



Corso di aggiornamento per docenti - A.I.F. Mantova

"Probabilità e Fisica"

I.T.I.S. "Fermi" - Mantova

17 novembre 2006

SOMMARIO



⌘ **INTRODUZIONE**

⌘ **CONCETTO DI PROBABILITA'**

⌘ **GIOCHI E PARADOSSI**

⌘ **ESPERIMENTI E APPLICAZIONI
INFORMATICHE**

⌘ **ELEMENTI DI STORIA**

⌘ **BIBLIOGRAFIA**

PERCHE' LA PROBABILITA'?

“Forse nessun settore della matematica è così intellettualmente stimolante come la probabilità; ... basta un bagaglio estremamente ridotto per raggiungere risultati interessanti ... argomenti altrimenti noiosi come le frazioni o le operazioni insiemistiche possono essere richiamati dalla cultura della scuola media in contesti inaspettati e stimolanti.”

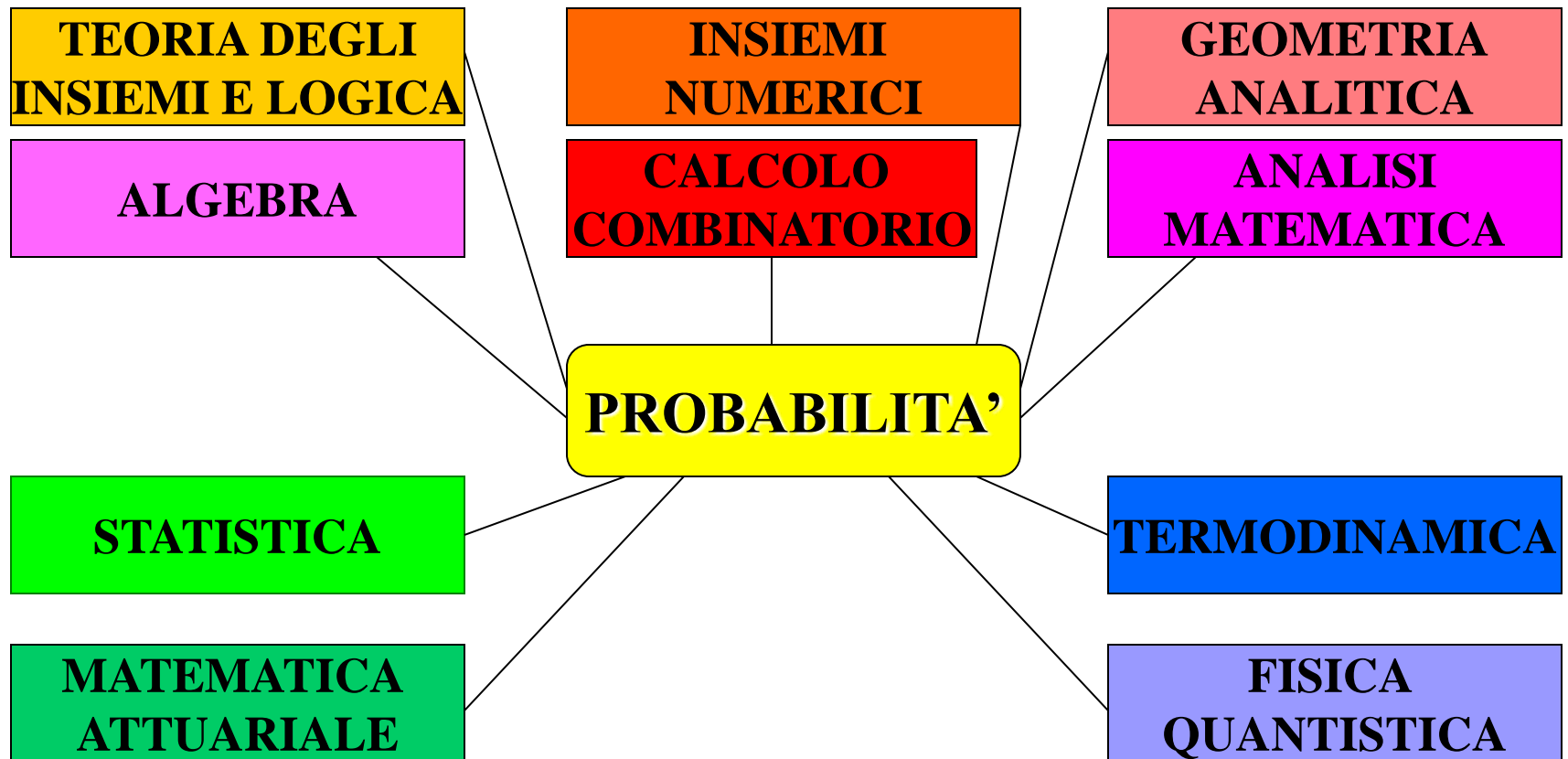
(G. Prodi, ‘Matematica come scoperta’, 1983)

C.I.I.M.-U.M.I. programmi di Frascati 1966-67 e attività di sperimentazione 1975-77

PREREQUISITI E DESTINATARI

	Prerequisiti	Destinatari
Concetto di probabilità	Numeri naturali e loro operazioni	Prima liceo
Teoremi sulla probabilità	Insiemi, logica, algebra, funzioni, calcolo combinatorio	Seconda e terza liceo
Distribuzioni di probabilità	Funzioni, geometria analitica, analisi matematica	Quarta e quinta liceo

PROBABILITA' E PROGRAMMI D'INSEGNAMENTO



PROBABILITA' E PROGRAMMI D'INSEGNAMENTO

CM 6-2-1991 PNI BIENNIO LICEO SCIENTIFICO

TEMA 4. ELEMENTI DI PROBABILITA' E DI STATISTICA

- a) Semplici spazi di probabilità: eventi aleatori, eventi disgiunti e "regola della somma".
- b) Probabilità condizionata, probabilità composta. Eventi indipendenti e "regola del prodotto".
- c) Elementi di statistica descrittiva:

COMMENTO AL TEMA 4. Al concetto di probabilità si perverrà da vari punti di vista, avvalendosi di opportune esemplificazioni tratte da situazioni reali. L'analisi dei problemi sarà facilitata da appropriate rappresentazioni: diagrammi di Eulero-Venn e, soprattutto, grafici di vario tipo. Il programma di statistica [...]

PROBABILITA' E PROGRAMMI D'INSEGNAMENTO

CM 27-9-96 PNI TRIENNIO LICEO SCIENTIFICO

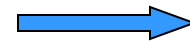
TEMA 4 - PROBABILITA' E STATISTICA

- 4.a Statistica descrittiva bivariata: ... Regressione e correlazione
- 4.b Valutazioni e definizioni di probabilità in vari contesti
- 4.c Correlazione, indipendenza, formula di Bayes.
- 4.d Variabili aleatorie in una e *in due dimensioni* (casi finiti)
- 4.e Variabili aleatorie discrete: distribuzioni binomiale, *geometrica, di Poisson*
- 4.f Distribuzioni continue. Distribuzione normale ed errori di misura nelle scienze sperimentali. *Distribuzione uniforme. Distribuzione esponenziale.*
- 4.g Legge dei grandi numeri (Bernoulli)
- 4.h *Confronti tra le distribuzioni binomiale, di Poisson, normale (mediante la costruzione di tabelle numeriche).*
- 4.i *Inferenza statistica: stima dei parametri per modelli semplici.*

PROBABILITA' E PROGRAMMI D'INSEGNAMENTO

COMMENTO al tema n. 4 - Probabilità statistica

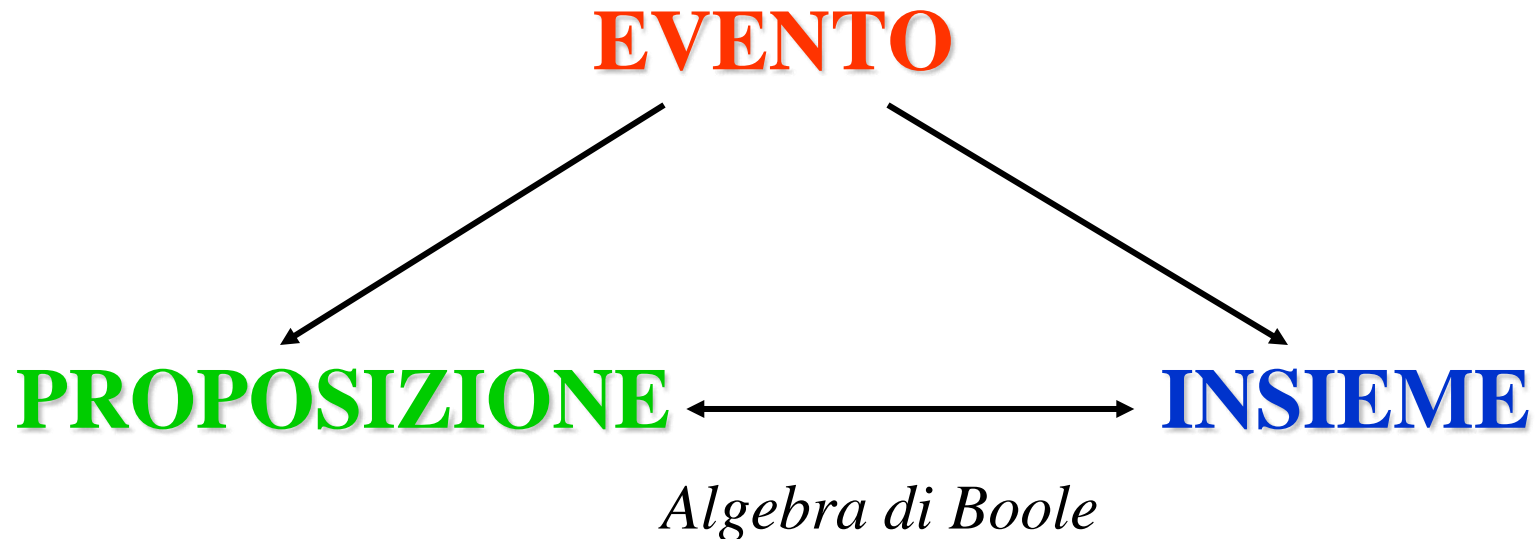
Gli elementi di calcolo delle probabilità e statistica rispondono all'esigenza di abituare l'alunno ad effettuare modellizzazioni di situazioni in condizioni di incertezza.[...] Una possibile sintesi tra le varie definizioni (di probabilità), che potrà essere effettuata all'ultimo anno, sta nella formalizzazione assiomatica della teoria, che va presentata e motivata sia da un punto di vista storico, sia secondo una giustificazione di comodità per lo sviluppo dell'intera teoria, sia per fornire un ulteriore esempio di teoria matematica espressa in forma ipotetico-deduttiva.[...]Le semplici distribuzioni di probabilità, che saranno trattate se il docente lo ritiene opportuno, sono sufficienti a dare indicazioni non banali sulla problematica di questa parte del calcolo delle probabilità, anche perché sono particolarmente ricche di applicazioni in vari contesti: [...]



PROBABILITA' E PROGRAMMI D'INSEGNAMENTO

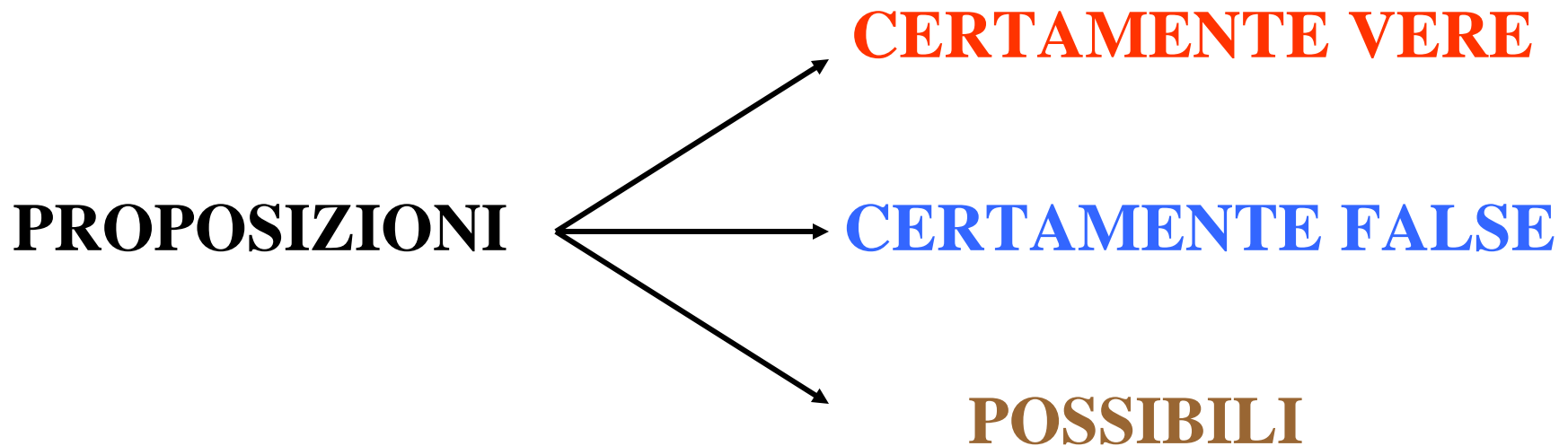
Lo studio della curva normale, introdotta anche sperimentalmente, e delle altre distribuzioni fornisce esempi significativi per l'applicazione di metodi e concetti dell'analisi, in particolare attraverso l'eventuale esame dei legami tra le distribuzioni binomiale e poissoniana, binomiale e normale, e mediante la costruzione numerica di tabelle approssimate. La legge dei grandi numeri fornisce un anello che lega i problemi statistici ed i modelli probabilistici permettendo, volendo, di introdurre già alcuni esempi significativi di inferenza. L'insegnante può presentare tale legge dal punto di vista teorico, con eventuale dimostrazione, oppure dal punto di vista empirico presentando al computer simulazioni di tipo bernoulliano.[...]Particolare cura sarà posta nel ricordare le basi storiche e filosofiche (Pascal, empirismo inglese, ecc.).

EVENTI



*“Un evento non può essere che o **vero** o **falso**; può essere **incerto** solo se e in quanto non siamo in possesso dell’informazione attestante che è vero oppure che è falso.” (B. De Finetti, 1970)*

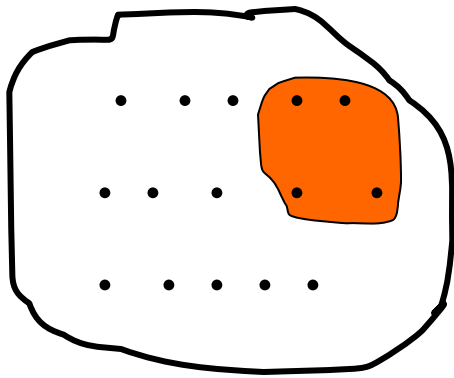
INCERTEZZA - POSSIBILITA'



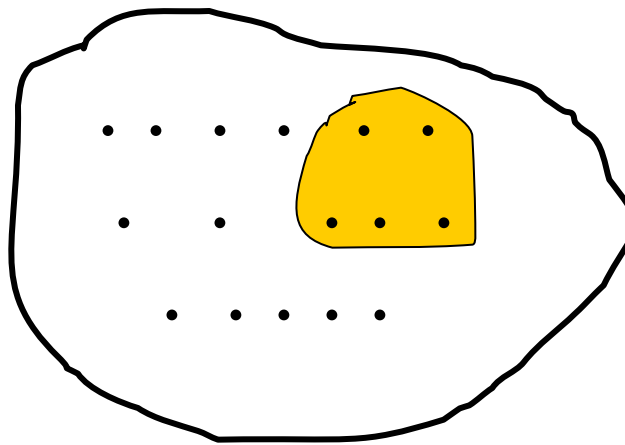
*“Tale qualifica di **possibile**’ esprime la nostra ignoranza, nel senso che, in base a quanto ci consta (di dati e di conoscenze) la detta affermazione potrebbe risultare sia vera che falsa.”* (B. De Finetti, 1970)

PRIMO APPROCCIO ALLA PROBABILITA'

L'urna U_1 contiene 15 biglietti dei quali 4 danno diritto ad un premio P ; l'urna U_2 ha 16 biglietti di cui 5 danno diritto allo stesso premio P . Da quale urna conviene estrarre un biglietto?



U_1



U_2

INSIEMI

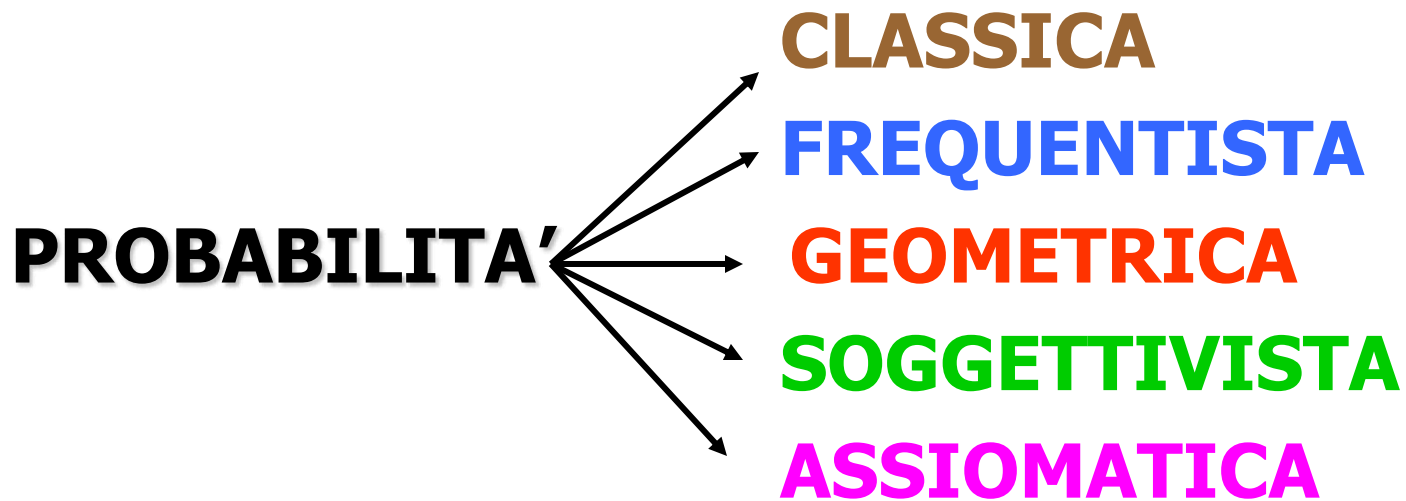


FRAZIONI



PROBABILITA'

DEFINIZIONI DI PROBABILITA'



PROBABILITA' CLASSICA

Definizione classica di probabilità :

$$P(A) = \frac{\textit{numero casi favorevoli}}{\textit{numero casi possibili}} = \frac{m}{n} \longleftarrow \textit{a priori}$$

- Sottintende il concetto di **eventi elementari** 'equiprobabili' (circolo vizioso)
- Contrapposizione di una parte (eventi favorevoli) al tutto (eventi possibili)
- Ambito ristretto di applicazione

PROBABILITA' CLASSICA

esempi

LA SCELTA DELLA PRINCIPESSA

Una principessa vuole scegliere lo sposo più bello tra 3 pretendenti sconosciuti, che si presentano uno dopo l'altro: quello rifiutato verrà eliminato. Come può fare per scegliere il meglio possibile? (vd [1])

oppure:



LE TRE BUSTE

In un gioco TV un concorrente riceve 3 buste chiuse contenenti ciascuna un diverso premio in denaro; sceglie e apre una busta: se accetta il premio il gioco finisce, altrimenti apre un'altra busta e così via. Qual è la strategia per ottenere il miglior premio? (vd [1])

PROBABILITA' CLASSICA

esempi

- ⌘ Sceglie uno a caso: la probabilità è $1/3$.
- ⌘ Rifiuta il 1°; se il 2° è meglio del 1° prende questo, altrimenti prende l'ultimo. La probabilità è $1/2$. Infatti vi sono 6 casi:

Be Me Br sceglie il 3°

Be Br Me sceglie il 3°

Me Be Br sceglie il 2°

Me Br Be sceglie il 3°

Br Be Me sceglie il 2°

Br Me Be sceglie il 2°

1° 2° 3°

} *3 casi favorevoli su 6 possibili*

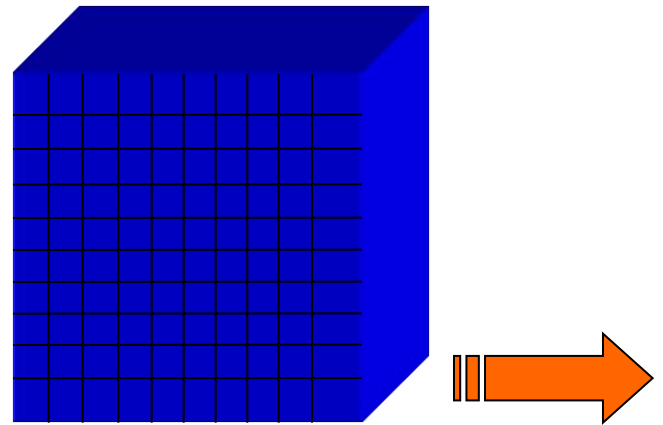
PROBABILITA' CLASSICA

esempi

UN CUBO VERNICIATO

Un cubo verniciato di blu viene tagliato con piani paralleli alle facce in 1000 cubetti, che poi vengono rimescolati. Qual è la probabilità che un cubetto a caso:

- a) abbia una faccia blu;
- b) abbia 2 facce blu;
- c) abbia 3 facce blu;
- d) non abbia alcuna faccia blu.
- e) Qual è la probabilità che lanciando un cubetto a caso, esca una faccia colorata?



(vd [1])

PROBABILITA' CLASSICA

esempi

a) $P(A) = 8 \times 8 \times 6 / 1000$, 8×8 cubetti per ogni faccia del cubo

b) $P(B) = 8 \times 12 / 1000$, 8 cubetti per ogni spigolo del cubo

c) $P(C) = 8 / 1000$, un cubetto per ogni vertice del cubo

d) $P(D) = 8 \times 8 \times 8 / 1000$, oppure:

$$P(D) = [1000 - (8^2 \times 6 + 8 \times 12 + 8)] / 1000$$

Osservazione: perché $P(A) + P(B) + P(C) + P(D) = 1$?

e) $P(E) = (6 \times 100) / (6 \times 1000) = 1/10$, contando le facce della superficie del cubo e il numero totale di facce di tutti i cubetti

PROBABILITA' CLASSICA

esempi

QUATTRO CARTE

Un mazzo è fatto da 4 carte: asso di picche AP, asso di cuori AC, fante di quadri FQ, due di fiori 2F. Tizio pesca due carte, le guarda e dichiara di avere un asso.

Qual è la probabilità che abbia un altro asso?

Se Tizio dichiara anche di avere AP, qual è la probabilità che abbia l'altro asso? (vedi [6])

(Henry Whitehead, Oxford, 1939)



PROBABILITA' CLASSICA

esempi

AP AC

AP FQ

AP 2F

AC FQ

AC 2F



unico caso favorevole su 5 possibili

$$P(E_1) = 1/5$$

AP AC

AP FQ

AP 2F



unico caso favorevole su 3 possibili

$$P(E_2) = 1/3$$

PROBABILITA' FREQUENTISTA

Definizione frequentista di probabilità :

$$P(A) = \frac{\textit{numero successi}}{\textit{numero totale prove}}, \text{ su tante prove}$$

← a posteriori

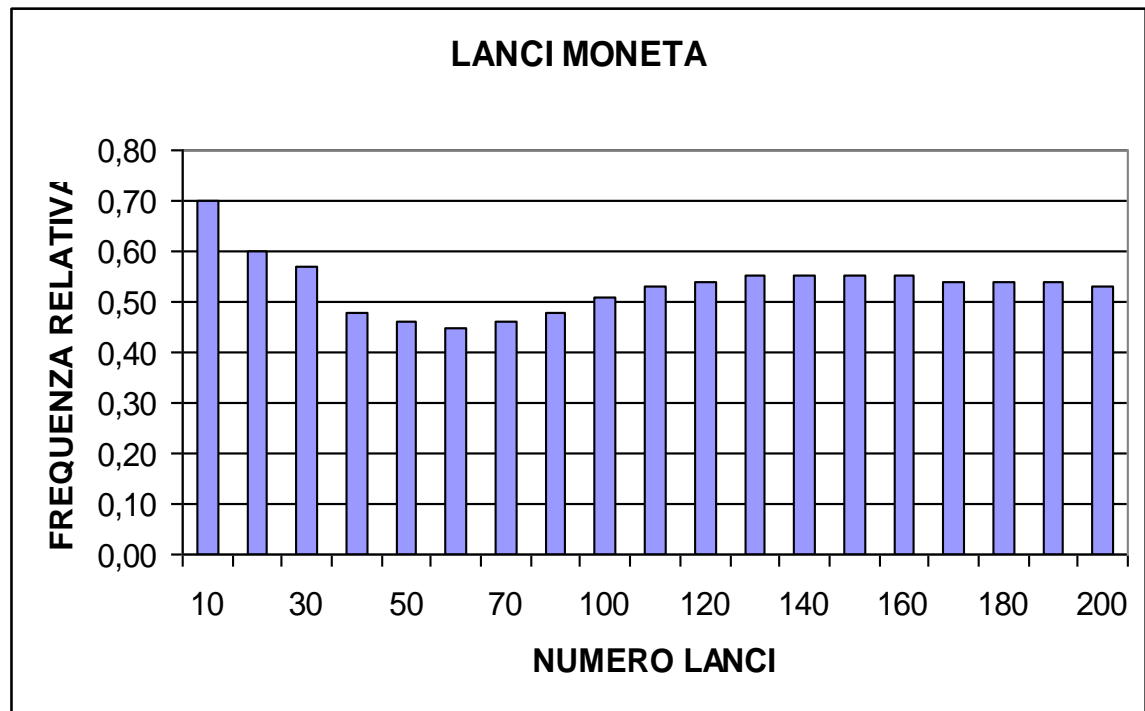
- E' la **frequenza relativa** di A su **molte prove**
- Sottintende la **legge empirica del caso**:
all'aumentare del numero delle prove la frequenza relativa tende alla probabilità.

PROBABILITA' FREQUENTISTA

esempi

Uso dell'**esperimento** (lanci di una moneta o di un dado, estrazioni della tombola,...): legame probabilità-realtà.

Lanciare 200 volte una moneta (o un dado) e annotare quante volte esce testa nei primi 10, 20,..., 200 lanci, con relativo diagramma.



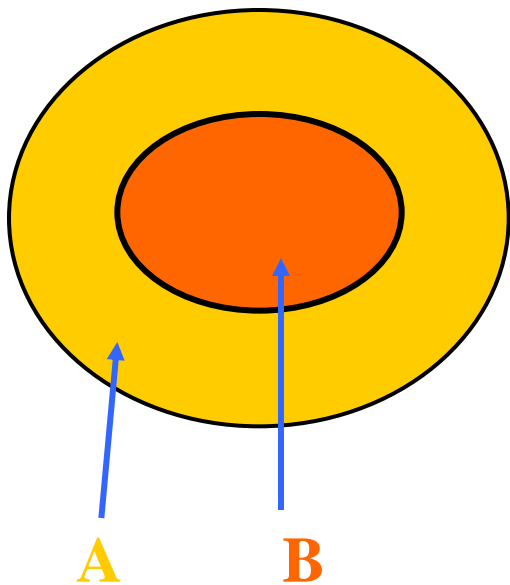
PROBABILITA' GEOMETRICA

Definizione geometrica di probabilità

$$P(A) = \frac{\text{area utile}}{\text{area totale}} = \frac{S}{S_T}$$

TIRO AL BERSAGLIO

Qual è la probabilità che un tiratore centri la zona **B** supponendo che comunque centri la zona **A**?

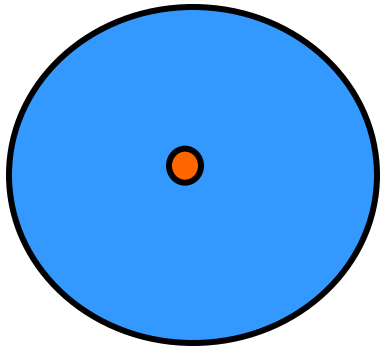


PROBABILITA' GEOMETRICA

esempi

NUCLEO ATOMICO

Noti i risultati di esperimenti tipo quelli di Rutherford e il raggio R_a dell'atomo, stimare il raggio R_n del nucleo atomico.



$R_a \sim 10^{-10}$ m raggio atomico

$p \sim 10^{-5}$ probabilità che una particella α sia molto deviata dal foglietto d'oro

10^3 numero di strati atomici presenti nel foglietto d'oro

$p' \sim 10^{-8}$ probabilità che una particella α sia deviata da un atomo del foglietto

$p' = \text{area sezione nucleo} / \text{area sezione atomo}$; da cui:

$$R_n = \sqrt{R_a^2 \cdot p'} \sim \sqrt{10^{-20} \text{ m}^2 \cdot 10^{-8}} \sim 10^{-14} \text{ m}$$

PROBABILITA' SOGGETTIVISTA

Definizione soggettivista di probabilità (De Finetti)

$$P(A) = \frac{\text{somma che si accetta di pagare}}{\text{somma che si vince se accade } A}$$

- E' “*la massima somma di denaro che un soggetto razionale è disposto a scommettere a fronte di una vincita lorda unitaria*”
- “...*la probabilità che qualcuno attribuisce alla verità - o al verificarsi - di un certo evento altro non è che la misura del grado di fiducia nel suo verificarsi*” (B. de Finetti, 1969)

PROBABILITA' SOGGETTIVISTA

Nel dettaglio:

⌘ Tizio punta (scommette) la somma

$$pS$$

⌘ se l'evento E si verifica Tizio vince

$$S$$

⌘ la **probabilità** dell'evento E è

$$p = pS / S$$

⌘ in particolare, se $S = 1$ allora $p = pS$

⌘ se si verifica E, il **guadagno** di Tizio è

$$G = (1-p)S$$

⌘ se non si verifica E, Tizio ha una **perdita**

$$G' = -pS$$

⌘ poiché $G \cdot G' \leq 0$ risulta:

$$-p(1-p)S^2 \leq 0$$

⌘ ovvero:

$$0 \leq p \leq 1$$

PROBABILITA' SOGGETTIVISTA

esempi

SCOMMESSE E CAVALLI

La probabilità di vittoria di un cavallo è 0,2. Lo scommettitore Tizio punta 30 E sul cavallo. In caso di vittoria quanto guadagna?

$S = pS / p = 30 \text{ E} / 0,2 = 150 \text{ E}$. Tizio guadagna: $G = (150 - 30) \text{ E}$

PROBABILITA' SOGGETTIVISTA

“*La probabilità non esiste*” (De Finetti, 1930): non esiste una probabilità determinabile fuori dal soggetto. L’*oggettività* viene recuperata all’interno della visione soggettivista.

La trattazione teorica *soggettivista* è *rigorosa* ed assume un’impostazione *assiomatica* (De Finetti: “Teoria delle probabilità”, 1970).

PROBABILITA' ASSIOMATICA

Definizione assiomatica di probabilità (Kolmogorov)

Dato l'insieme $S \neq \emptyset$ (**spazio dei risultati** o universo) e

l'insieme $E \subseteq P(S)$ tale che:

*evento unione
o somma*

*evento
intersezione
o prodotto*

i. $S \in E$

ii. se $A, B \in E$ allora $A', B', A \cup B, A \cap B \in E$

Gli elementi di E si dicono **eventi**, E si dice **campo degli eventi** (o σ -algebra o campo di Borel).

N.B. A' è il **complementare** di A rispetto a S (evento **contrario**)

PROBABILITA' ASSIOMATICA

Esiste una **funzione** P , detta **probabilità**, che associa all'evento $A \in E$ un numero reale $P(A)$ tale che:

A1. $P(A) \geq 0$

A2. $P(S) = 1$

A3. se $A \cap B = \emptyset$ allora $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

A4. se $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in E$, con $A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$,

allora :

$$P\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i P(A_i)$$

TEOREMI SULLA PROBABILITA'

Dagli assiomi seguono vari **teoremi**: *evento contrario*

$$T1. P(\emptyset) = 0$$

$$T2. P(A') = 1 - P(A)$$

$$T3. \text{se } A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$$

$$T4. P(A) \in [0, 1]$$

$$T5. P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$T6. \text{se } A_1, A_2, \dots, A_n \in E, A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j, \bigcup_{i=1}^n A_i = S \Rightarrow \sum_{i=1}^n P(A_i) = 1$$

$$\text{e se } P(A_i) = P(A_j) \quad \forall i, j \Rightarrow P(A_i) = \frac{1}{n} \quad \text{e se } A = \bigcup_{i=1}^m A_i \Rightarrow P(A) = \frac{m}{n}$$

definizione classica di probabilità

PROBABILITA' CONDIZIONATA

diagramma ad

albero

Probabilità condizionata :

$$P(A | B) = P(A \cap B) / P(B)$$

da cui:

$$P(A \cap B)$$

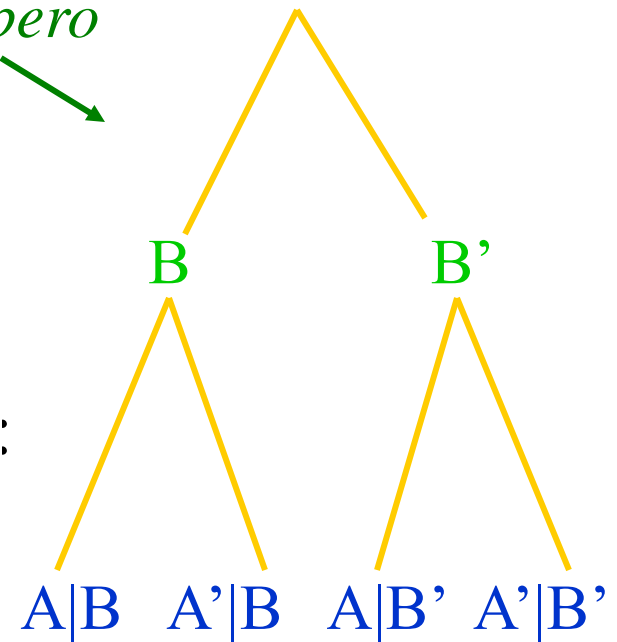
$$P(A | B) \cdot P(B) = P(B | A) \cdot P(A)$$

Se A e B sono **eventi indipendenti**:

$$P(A | B) = P(A), P(B | A) = P(B)$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$$



TEOREMI SULLA PROBABILITA'

esempi

UN PROBLEMA POSTO A PASCAL

E' più probabile ottenere almeno un '6' lanciando 4 volte un dado o ottenere almeno un '12' lanciando 24 volte due dadi?

(Antoine Gombaud, Chavalier de Méré a Blaise Pascal)

Uso dell'evento contrario (complementare) e dell'evento prodotto

A: esce il '6' con un lancio , A': non A , $P(A') = 5/6$

B: esce il '12' con un lancio , B': non B , $P(B') = 35/36$

C: non esce il '6' su 4 lanci, C': non C , $P(C') = 1 - (5/6)^4 \sim 0,52$

D: non esce il '12' su 24 lanci, D': non D, $P(D') = 1 - (35/36)^{24} \sim 0,49$

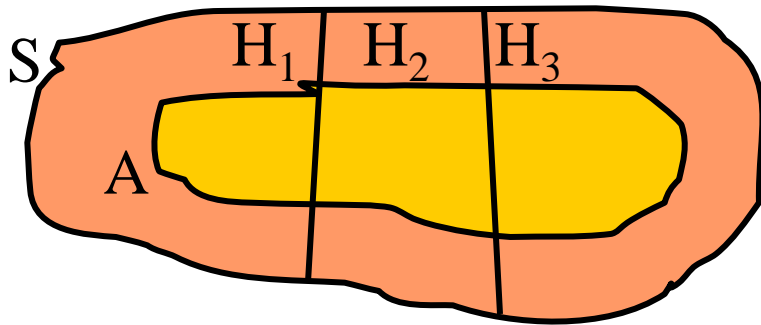
N.B. Si poteva usare la *distribuzione binomiale*

TEOREMA DI BAYES

Se $S = \bigcup_{i=1}^n H_i$, $H_i \cap H_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$, $A \subseteq S$ allora

$$P(H_k | A) = \frac{P(H_k) \cdot P(A | H_k)}{\sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A | H_i)}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

$P(A)$ *probabilità totale*



L'ipotesi H_k è formulata prima di A . Sono note $P(H_k)$ (probabilità **a priori**) e $P(A)$; il teorema di Bayes fornisce la probabilità **a posteriori** $P(H_k|A)$.

TEOREMA DI BAYES

esempi

TESTA E CROCE

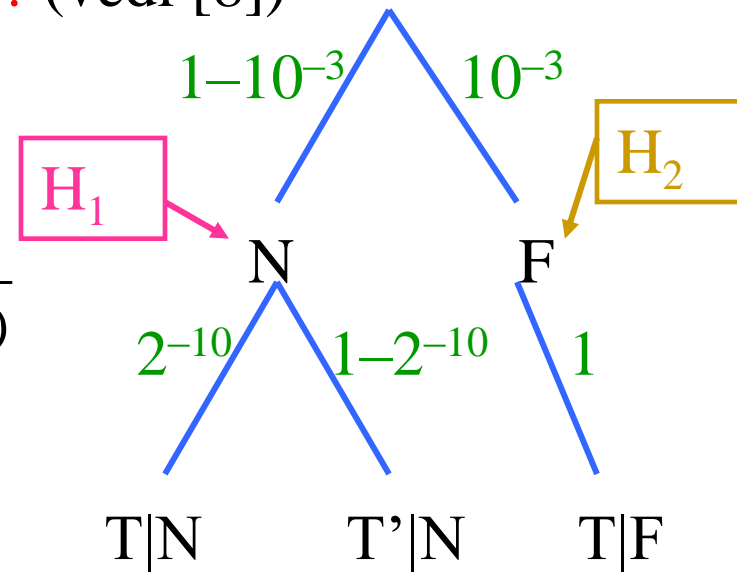
Tra 1000 monete 999 sono regolari e una è falsa (dà sempre testa). Qual è la probabilità che una moneta estratta a caso sia quella falsa se, lanciata per 10 volte, dà sempre testa? (vedi [8])

N: moneta normale, F: moneta falsa

T: esce testa 10 volte, T': non T

$$P(F | T) = \frac{P(F) \cdot P(T | F)}{P(F) \cdot P(T | F) + P(N) \cdot P(T | N)}$$

$$P(F | T) = \frac{10^{-3}}{10^{-3} + 2^{-10} \cdot (1 - 10^{-3})} \cong 50,62\%$$



GIOCHI DI SORTE

Vinco la **posta** S se si verifica un evento con probabilità p , vinco $-S'$ in caso contrario (probabilità $q = 1 - p$). La **speranza matematica** (previsione di vincita media su molte partite) è: $Sp - S'q$.

Il **gioco** è **equo** se la speranza è nulla: $Sp - S'q = 0$.

In un gioco equo il **prezzo** $\Pi = Sp$ è la speranza della vincita.

GIOCHI DI SORTE

esempi

ASSICURAZIONI

Una compagnia assicuratrice paga 200.000 E in un caso su 10.000, 50.000 E in uno su 1.000, 2.000 E in 1 su 50, nulla nei restanti casi. Quanto ci si aspetta che paghi mediamente?

(vedi [5])



GIOCARE A DADI

Tiro 3 dadi: se '1' esce 3 volte vinco 3E, se esce 2 volte vinco 2E, se esce 1 volta vinco 1E, se non esce perdo 1E. Mi conviene giocare, cioè il gioco è equo?

(vedi [5])



GIOCHI DI SORTE

esempi

Valore atteso (speranza matematica):

$$\left(200.000 \cdot \frac{1}{10.000} + 50.000 \cdot \frac{1}{1.000} + 2.000 \cdot \frac{1}{50} + 0\right) E = 110E$$

Distribuzione bernoulliana: $p = 1/6$, $n = 3$, S : somma vinta o persa.

$$Speranza = p_0 S_0 + p_1 S_1 + p_2 S_2 + p_3 S_3 =$$

$$= \left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot (-1E) + 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot 1E + 3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{5}{6} \cdot 2E + \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot 3E = -0,08E$$

GIOCHI E PARADOSSI PROBABILISTICI

LO STESSO COMPLEANNO

(George Gamow, "One, two, three...infinity", 1947)

Qual è la probabilità che tra k persone ve ne siano almeno 2 che compiono gli anni nello stesso giorno? (vedi [5],[6],[7],...)

probabilità che 2, 3, ..., k persone non compiano gli anni nello stesso giorno: $364/365, 363/365, \dots, (365-k+1)/365$


probabilità che gli eventi precedenti (indipendenti) si avverino tutti insieme: $364 \cdot 363 \cdot \dots \cdot (365-k+1)/365^{k-1}$;

probabilità richiesta: $1 - \frac{364 \cdot 363 \cdot \dots \cdot (365 - k + 1)}{365^{k-1}} = 1 - \frac{365!}{(365 - k)!365^k}$


se $k = 40$ la probabilità richiesta è circa uguale a 0,89

GIOCHI E PARADOSSI PROBABILISTICI

BUSTE, BOLLETTE E CARTE

Ci sono 1000 bollette (diverse) del gas e 1000 buste (diverse) riportanti ciascuna il nome dell'utente di una delle bollette. Se si infila a caso una bolletta in ciascuna busta, qual è la probabilità che almeno una busta abbia la bolletta giusta? (vedi [5]) 

oppure:

Vi sono due uguali mazzi di carte da briscola. Creiamo 40 coppie di carte (coperte), ciascuna formata da una carta di ogni mazzo. Qual è la probabilità che, scoprendo le carte di una coppia, esse risultino uguali? (vedi [5]) 

GIOCHI E PARADOSSI PROBABILISTICI

Probabilità che 1 busta non contenga la sua lettera: $999/1000$

Probabilità che 2 buste non contengano la loro lettera: $(999/1000)^2$

Probabilità che 1000 buste non contengano la loro lettera:
 $(999/1000)^{1000}$

Probabilità che almeno 1 busta contenga la sua lettera:

$$P(A) = 1 - (999/1000)^{1000} \cong 63,23\% \quad . \quad P(A) = 1 - (39/40)^{40} \cong 63,68\% \quad .$$

Generalizzando, con n buste, carte,... se n è molto grande:

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[1 - \left(\frac{n-1}{n} \right)^n \right] = \lim_{k \rightarrow -\infty} \left[1 - \left(1 + \frac{1}{k} \right)^{-k} \right] = 1 - \frac{1}{e} \cong 63,21\%$$

GIOCHI E PARADOSSI PROBABILISTICI

ESAMI, MALATTIE E AGGRESSIONI

Un esame per vedere se si ha una certa malattia funziona nel 98% dei casi. Lo 0,5% della popolazione ha quella malattia. Qual è la probabilità che il paziente, risultato positivo all'esame, abbia la malattia? (vedi [5])



oppure:

Il 10% della popolazione di una città è costituito da marziani. Una sera Tizio viene aggredito e dice alla polizia di essere sicuro all'80% che il suo aggressore sia un marziano. Qual è la probabilità che quello che dice Tizio sia vero? (vedi [5])



GIOCHI E PARADOSSI PROBABILISTICI

⌘ I SOLUZIONE

10.000 pazienti	{	50 malati	{	49 riconosciuti malati	98%
		0,5%		1 riconosciuto sano	2%
		9.950 sani	{	199 riconosciuti malati	2%
		99,5%		9.751 riconosciuti sani	98%

Riconosciuti malati: $49+199=248$; effettivi malati tra quelli riconosciuti: 49 . $P(A) = 49/248 \cong 20\%$. Non c'è da disperarsi!!

E così $P(A) = 8/(8+18) \cong 31\%$. Deposizione poco attendibile!!

GIOCHI E PARADOSSI PROBABILISTICI

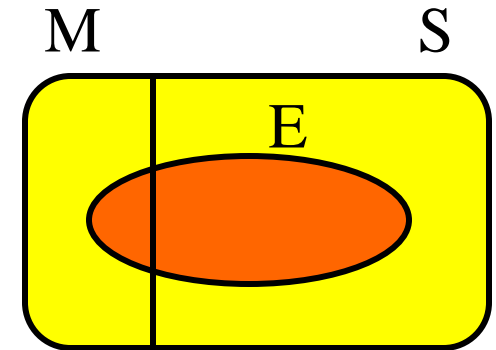
II SOLUZIONE

Col teorema di Bayes

M: malati S: sani E: riconosciuti malati

$P(M) = 5/1000$; $P(S) = 995/1000$;

$P(E|M) = 98/100$; $P(E|S) = 2/100$. Si chiede:



$$P(M | E) = \frac{P(E | M) \cdot P(M)}{P(E | M) \cdot P(M) + P(E | S) \cdot P(S)}$$

$$P(M | E) = \frac{0,98 \cdot 0,005}{0,98 \cdot 0,005 + 0,02 \cdot 0,995} = \frac{49}{248} \cong 20\%$$

Analogamente:

$$P(M | A) = \frac{0,80 \cdot 0,10}{0,80 \cdot 0,10 + 0,20 \cdot 0,90} = \frac{4}{13} \cong 31\%$$

GIOCHI E PARADOSSI PROBABILISTICI

PARADOSSO DI SIMPSON, 1951

Un medico dice che la nuova cura ha circa il doppio di efficacia della cura tradizionale, basandosi su rilevazioni statistiche fatte in 2 città. Ha ragione? Qual è la probabilità che la cura sia efficace?

(vedi [6])

EFFICACIA DELLA CURA	ALFAVILLE		BETAVILLE	
	TRAD	NUOVA	TRAD	NUOVA
NO	950 (95%)	9000 (90%)	5000 (50%)	5 (5%)
SI	50 (5%)	1000 (10%)	5000 (50%)	95(95%)



GIOCHI E PARADOSSI PROBABILISTICI

Sommando i dati omologhi delle 2 città, costruiamo la tabella sottostante. Si vede subito che la nuova cura risulta molto meno efficace della vecchia!!

EFFICACIA DELLA CURA	TRAD	NUOVA
NO	5950 (54%)	9005 (89%)
SI	5050 (46%)	1095 (11%)

GIOCHI E PARADOSSI PROBABILISTICI

LE TRE CARTE (Warren Weaver, 1950)

Ci sono tre carte: una con le facce bianche, una con le facce rosse e una con una faccia bianca e una rossa. Ogni carta è in una scatola nera, uguale alle altre. Un giocatore sceglie una scatola ed estrae la carta guardando solo la faccia superiore. Se tale faccia è bianca, il banco scommette alla pari (50%) che è bianca anche l'altra faccia. Conviene accettare la scommessa? (vedi [6])



GIOCHI E PARADOSSI PROBABILISTICI

Le carte sono: B1B2 , R1R2 , R3B3 . Se la carta estratta presenta una faccia bianca, sono possibili **tre** casi e non due:

faccia visibile della carta estratta: B1 B2 B3
 ↓ ↓ ↓
altra faccia della carta estratta: B2 B1 R3

La probabilità che l'altra faccia della carta estratta sia bianca è $2/3$ e non $1/2$. Quindi il banco è avvantaggiato nella scommessa.

ESPERIMENTI PROBABILISTICI

LANCIO DI DADI

Lanciare n volte un dado e annotare ogni volta l'uscita.

Studiare i fenomeni:

- quante volte è uscito un pari nei primi 10, 20, ..., n tiri (es. $n=200$);
- quante volte è uscito 'tre' nei primi 10, 20, ..., n tiri (es. $n=200$);
- su gruppi di n lanci (es. $n=6$) in quanti casi il 'tre' è uscito 0,1,...,6 volte;
- quanti lanci attendere per avere la prima uscita del 'tre';
- quante volte appare il 'tre' su 200 tiri usando un dado: tetraedrico, cubico, ottaedrico, dodecaedrico, icosaedrico,...

ESPERIMENTI PROBABILISTICI

ESECUZIONE CON L'USO DI EXCEL

CASUALE() : dà un numero decimale tra 0 e 1

ARROTONDA(X;Y): arrotonda X al numero più prossimo con Y cifre decimali

INT(X) : arrotonda X per difetto all'intero più prossimo

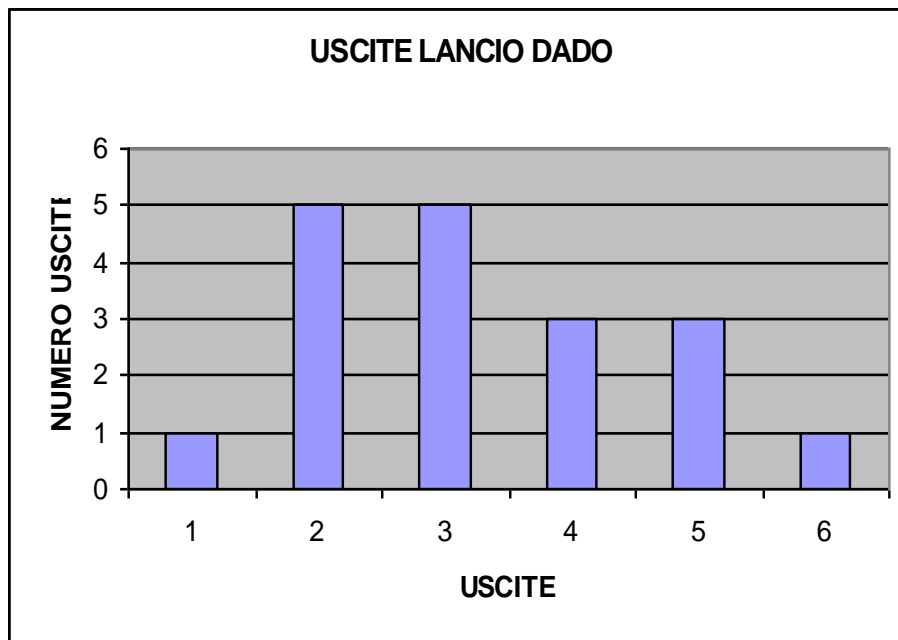
La formula **=ARROTONDA(CASUALE()*5+1;0)** in A1 e copiata più volte in colonna dà un numero a caso tra 1 e 6 .

Così per la formula **=INT(CASUALE()*6+1)**.

CONTA.SE(X:Y;Z) : conta quanti numeri uguali a Z vi sono dalla cella X alla cella Y

ESPERIMENTI PROBABILISTICI

Esempio di simulazione di 18 lanci di un dado e relativa distribuzione delle uscite.



ESPERIMENTI PROBABILISTICI

STIMARE 'A OCCHIO'

Si presenta agli spettatori una striscia di cartoncino (o altro oggetto adatto): ognuno annota la lunghezza che secondo lui deve avere il cartoncino. Si raccolgono i dati e si analizzano in classi di frequenze, costruendo il relativo istogramma.

Vi è una moda? Che cosa si può dire di media e mediana?

Se vi è una moda, si può identificare attorno ad essa una zona in cui si raccolga circa i $2/3$ dei dati? Si possono 'normalizzare' i dati? Che cosa rispondere a chi chiede qual è la 'vera' lunghezza del cartoncino?

ELEMENTI DI STORIA DELLA PROBABILITA'

Origini legate al **gioco**, in particolare al **gioco d'azzardo** e quindi alle **scommesse**: prima coi dadi (dai tempi dei Romani), poi anche con le carte (dopo il 1350).

Condanna da parte dello Stato e della Chiesa dei vizi legati al gioco d'azzardo:

- sermone di S. Cipriano da Cartagine *De Aleatoribus* (c. 240)
- sermone di S. Bernardino da Siena *Contra aleatorum ludus* (1423)
- Federico II (1232): legge *de aleatoribus*
- Luigi IX (1255): proibizione del gioco e della costruzione dei dadi

.....

ELEMENTI DI STORIA DELLA PROBABILITA'

Nonostante le proibizioni il gioco fiorisce in tutte le classi sociali sia come **passatempo** che come **sfida alle leggi**.

Tra i giochi più diffusi: *hazard* (dadi) e *primero* (carte).

Wibold da Cambray (960) diffuso nel XVII sec.

De Vetula (Richard de Fournival (1200-50)?)



conteggio del numero dei modi in cui tre dadi possono cadere

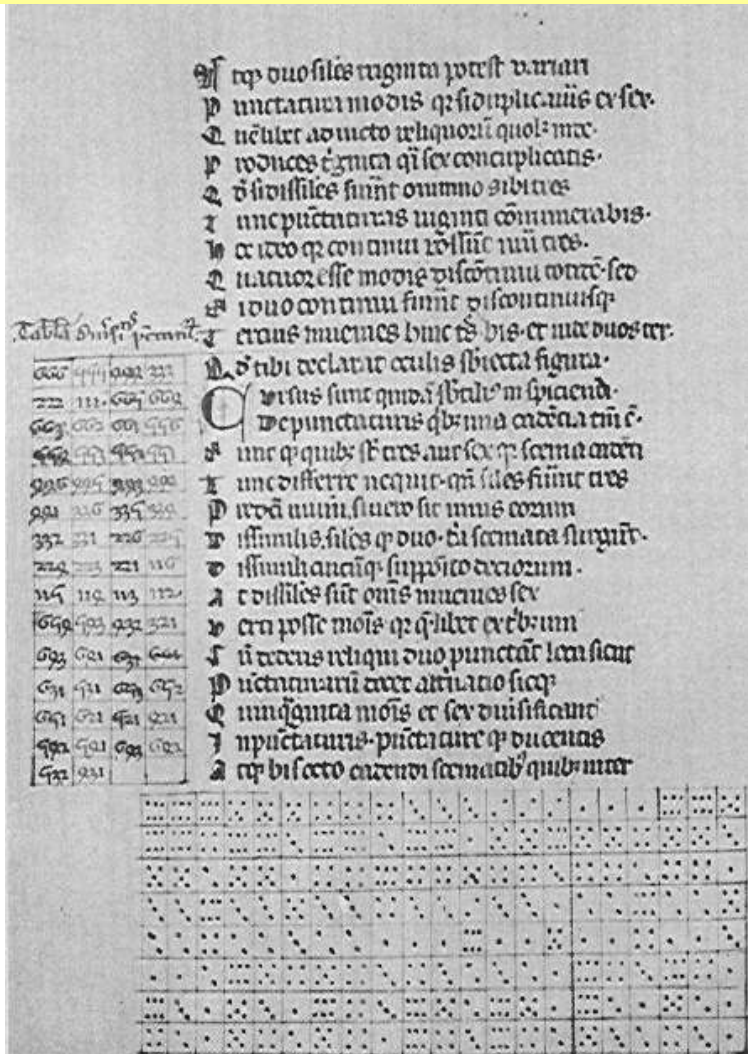
Ma **fino al 1400 non vi è uno studio adeguato sui casi possibili** presenti in un certo gioco.

(M. Kendall, *Origini del calcolo delle probabilità*, 2001)

ELEMENTI DI STORIA DELLA PROBABILITA'

Dal *De Vetula*

I due schemi presenti contengono alcuni errori. Quello in basso, che fa ricorso alle facce dei tre dadi, è chiaramente organizzato in tre sezioni: la prima composta da terne con punti tutti uguali fra loro, la seconda con due punti uguali ed uno diverso, la terza con tutti e tre i punti differenti. In quest'ultima la terna (6, 4, 3) viene ripetuta tre volte e mancano, in compenso, le terne (6, 5, 3) e (6, 3, 2). Anche lo schema, in cifre arabe, a sinistra contiene errori: il (6, 4, 3) ripetuto. Tutto ciò aumenta i dubbi circa la possibilità di interpolazioni posteriori alla prima stesura. Naturalmente occorrerebbe un'analisi del documento originale e di quelli successivi per una datazione meno incerta del documento. (M. Kendall, op. cit.)

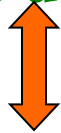


ELEMENTI DI STORIA DELLA PROBABILITA'

Con il 15° secolo e fino a metà del 16° secolo

⌘ si fanno osservazioni su:

problemi di **divisione della posta** in una partita interrotta



problemi sulla **divisione dei guadagni e delle perdite** in contratti commerciali (commercio marittimo, assicurazioni, ...)

⌘ emergono:

* la **dimensione del tempo** (speculazione)

* il **desiderio di controllare il futuro** (pianificazioni commerciali)

(I. Schneider, *Why do we find the origin of a calculus of*

probabilities in the 17th century?, 1980)

ELEMENTI DI STORIA DELLA PROBABILITA'

Perché il calcolo della probabilità emerse solo nel 17° secolo?

- a) assenza di un'algebra combinatoria ;
- b) superstizione degli scommettitori;
- c) assenza della nozione di evento casuale;
- d) barriere religiose o morali che si frapponevano allo sviluppo dell'idea di casualità e di caso

(M. Kendall, *Origini del calcolo delle probabilità*, 2001)

ELEMENTI DI STORIA DELLA PROBABILITA'

Fino al 17° secolo il concetto di probabilità è legato a:

- ⌘ ‘**endoxos**’ (Aristotele): livello di credenza che dipende dallo stato di informazione del soggetto (anticipa il soggettivismo)
- ⌘ ‘**dogma**’ **aristotelico**: agli eventi casuali - e ai giochi d’azzardo - non può essere applicata la nozione scientifica di probabilità.

(I. Schneider, *Why do we find the origin of a calculus of probabilities in the 17th century?*, 1980)

ELEMENTI DI STORIA DELLA PROBABILITA'

Luca Pacioli (1445-1514)

*Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni
et Proportionalità* (1494).

Problema dei punti (o delle parti):

A e B giocano ad un gioco equo e si accordano
nel continuare sino a quando uno vince 6 partite,

ma la competizione deve essere interrotta quando A ha vinto 5 partite
e B ne ha vinte 3. Come dovrebbe essere ripartita la posta?

Pacioli dice che le poste dovrebbero esser suddivise nella
proporzione di 5 a 3, ma la soluzione è errata.



ELEMENTI DI STORIA DELLA PROBABILITA'

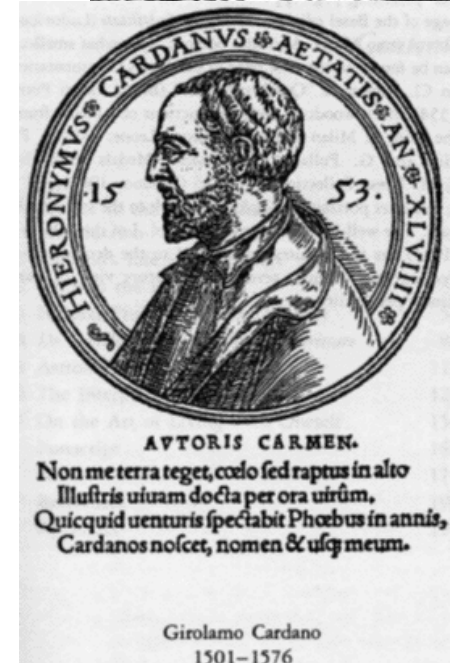
Niccolò Tartaglia (1499-1557)

General Trattato (1556): corregge Pacioli nel problema dei punti; appare il triangolo numerico.



Girolamo Cardano (1501-1576)

De ludo aleae (1526?, postumo 1663): studio matematico dei giochi di sorte, (gioco a carte *primero*); probabilità dell'evento prodotto logico di due eventi;anticipazione della legge dei grandi numeri.



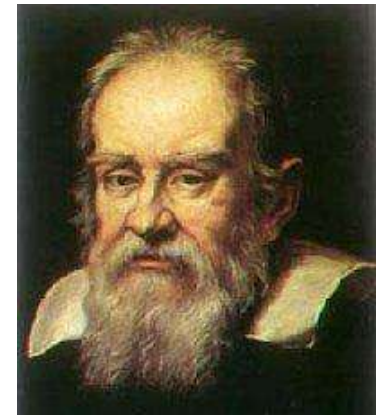
ELEMENTI DI STORIA DELLA PROBABILITA'

Galileo Galilei (1564-1642)

Sopra le scoperte dei dadi? (1630?): studio probabilità nel gioco della zara (lancio di 3 dadi).

“... il numero delle scoperte de i tre dadi che si compongono da tre numeri uguali non si producono se non in un solo modo; le triplicità che nascono da due numeri uguali e dal terzo differente si producono in 3 maniere; quelle che nascono da 3 numeri tutti differenti si formano in 6 maniere...”

10	9		8			7			6			5		4		3		
6.3.1.	6	6.2.1.	6	6.1.1.	3	5.1.1.	3	4.1.1.	3	3.1.1.	3	2.1.1.	3	1.1.1.	1			1
6.2.2.	3	5.3.1.	6	5.2.1.	6	4.2.1.	6	3.2.1.	6	2.2.1.	3							3
5.4.1.	6	5.2.2.	3	4.3.1.	6	3.3.1.	3	2.2.2.	1									6
5.3.2.	6	4.4.1.	3	4.2.2.	3	3.2.2.	3											10
4.4.2.	3	4.3.2.	6	3.3.2.	3													6
4.3.3.	3	3.3.3.	1															27
																		25
																		21
																		15
																		10
																		6
																		3
																		1
																		108



ELEMENTI DI STORIA DELLA PROBABILITA'

Blaise Pascal (1623-1662)

Approccio matematico alla probabilità; studio del triangolo di Tartaglia dei coefficienti binomiali.

Carteggio con Pierre de Fermat (1601-1665)

e col Cavaliere de Mèrè (1654) su problemi di probabilità e giochi di sorte.

Traite du triangle arithmetique: concetti di vincita e di speranza matematica in un gioco di sorte, divisione equa della posta.



ELEMENTI DI STORIA DELLA PROBABILITA'

F e P giocano a "Testa o Croce". Ciascuno punta 50 franchi. Ogni partita vinta vale un punto. Se esce T(testa) il punto è di F, se esce C(croce) il punto è di P. Quando uno di essi avrà raggiunto 10 punti, avrà i 100 franchi. Ma devono smettere di giocare quando F sta vincendo per 8 a 7. Come si divideranno i 100 franchi?

Prima soluzione (alla Pacioli)

$8+7=15$; F riceve $8/15$ della posta totale, P ne riceve i $7/15$.

ELEMENTI DI STORIA DELLA PROBABILITA'

Seconda soluzione (alla Fermat)

TTTT TTTC TTCT TCTT

blu: F vince

CTTT TTCC TCTC TCCT

CTTC CTCT CCTT TCCC

rosso: P vince

CCTC CCCT CTCC CCCC

F vince se escono almeno 2 T su un numero massimo di 4 lanci.

F ha probabilità $11/16$ di vincere e gli spettano gli $11/16$

dell'intera posta; a P spettano i $5/16$ dell'intera posta.

ELEMENTI DI STORIA DELLA PROBABILITA'

Terza soluzione (alla Pascal)

A **F** mancano **2** punti per vincere, a **P** ne mancano **3**. Prendo la 5^a riga ($2+3=5$) o quella di posto 4 del triangolo di Pascal:

1 4 6 4 1 . Sommo tutti i termini: $1+4+6+4+1=2^4=16$.

Sommo i primi 3 termini: $1+4+6=11$ e ho la probabilità che **F** vinca : $11/16$; in tal caso si prende gli $11/16$ dell'intera posta.

Sommo i primi 2 termini: $1+4=5$ e ho la probabilità che **P** vinca : $5/16$; in tal caso si prende i $5/16$ dell'intera posta.

Possibilità di generalizzare la questione.

ELEMENTI DI STORIA DELLA PROBABILITA'

Christiaan Huygens (1629-1695)

De ratiociniis in ludo aleae (1656-7), con lettera a Van Shooten:
primo libro ampio sul calcolo della probabilità; concetto di speranza;
rifonda la teoria, senza far uso dei risultati dei 'francesi'.

*“Quanto meno sembra che possano essere comprese
dalla ragione le cose che sono casuali e incerte,
tanto più mirabile sarà stimata la scienza alla
quale sono subordinate anche queste cose”.*

Riprende il problema dei punti, confermando i
risultati ottenuti da Pascal e Fermat.



Christiaan Huygens
(1629-1695)

ELEMENTI DI STORIA DELLA PROBABILITA'

Gottfried W. Leibniz (1646-1716)

Dissertatio de arte combinatoria (1666):

linguaggio matematizzato modellato sulla stessa
struttura del pensiero (*characteristica universalis*)

che dovrebbe poter ridurre ogni disputa filosofica a un semplice
calcolo del valore di verità di un enunciato; trovare tutti i possibili
predicati di un dato soggetto e, dato un predicato, trovare tutti i suoi
possibili soggetti.



ELEMENTI DI STORIA DELLA PROBABILITA'

Jakob Bernoulli (1654-1705)

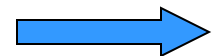
Ars Conjectandi (opera incompleta, edita postuma nel 1713 da N. Bernoulli): legge dei grandi numeri, distribuzione binomiale. “Noi definiamo l’arte di congetturare, o stocastica, come quella di valutare il più esattamente possibile le probabilità delle cose, affinché sia sempre possibile, nei nostri giudizi e nelle nostre azioni, orientarci su quella che risulta la scelta migliore, più appropriata, più sicura, più prudente”.

Luigi Togliani - Introduzione alla
probabilità - MN 17-11-06

JACOBI BERNOULLI,
Profess. Basl. & utriusque Societ. Reg. Scientiar.
Gall. & Pruss. Sodal.
MATHEMATICI CELEBERRIMI,
ARS CONJECTANDI,
OPUS POSTHUMUM.
Accedit
TRACTATUS
DE SERIEBUS INFINITIS,
Et EPISTOLA Gallicè scripta
DE LUDO PILÆ
RETICULARIS.



BASILEÆ,
Impensis THURNISIORUM, Fratrum.
MDCCLXIII.



ELEMENTI DI STORIA DELLA PROBABILITA'

*“...nei giochi di carte o di dadi l’aspettativa può essere precisamente e scientificamente determinata”
invece:*

“...nessun mortale potrà mai sapere il numero degli eventi rischiosi che possono accadere a un giovane o a un anziano...”

*“La via più sicura per valutare la probabilità non è in questi casi **a priori**, cioè partendo dalle cause, ma **a posteriori**, ricavandola dalla frequenza degli eventi osservati in casi analoghi.”*

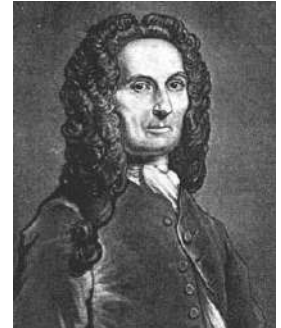


ELEMENTI DI STORIA DELLA PROBABILITA'

Abraham De Moivre (1667-1754)

The Doctrine of Chances (1718-38): concetto di speranza, probabilità classica, algebrizzazione della probabilità.

Approssimazione normale alla binomiale (1733).



“Probabilità di ottenere un asso lanciando 4 volte un dado a 6 facce. ...lanciare un dado 4 volte equivale a lanciarne 4 una volta sola... $a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$ ciascuno dei termini in a si potrà considerare come una parte del numero di possibilità che l'asso si presenti. I termini in cui compare a sono 4 e quindi ponendo $a=1$ e $b=5$, avremo il numero $1+20+150+500=671$... il numero di tutte le possibilità è $(a+b)^4 = 6^4=1296$, ...la probabilità è $671/1296$ ”

Luigi Togliani - Introduzione alla
probabilità - MN 17-11-06

ELEMENTI DI STORIA DELLA PROBABILITA'

Thomas Bayes (1702-1761)

Il teorema di B. (in *Essay towards solving a problem in the doctrine of chances*, 1763, postumo) è alla base della teoria soggettivista. Inferenza bayesiana.



BIBLIOGRAFIA

LIBRI

- [1] Prodi G., "Matematica come scoperta", voll.1 e 2, D'Anna, FI, 1983
- [2] Di Bacco-Lombardo, "Fatti e congetture", La Nuova Italia, FI, 1990
- [3] Zwirner-Scaglianti, "Pensare la Matematica", voll. 2 e 3, CEDAM, PD, 1993
- [4] De Finetti B., "Il saper vedere in Matematica", Loescher, TO, 1967
- [5] Paulos J. A., "Gli snumerati", Leonardo, MI, 1990
- [6] Falletta N., "Il libro dei paradossi", TEA, 2002
- [7] Gardner M., "Enigmi e giochi matematici", BUR, 1998
- [8] Maraschini-Palma, "Format, SPE", vol.2, Paravia, TO, 1996
- [9] Lombardo Radice-Mancini Proia, "Il metodo matematico", Principato, MI, 1977
- [10] Nuffield, "Change and chance", unit 9, Longman, London, 1975

BIBLIOGRAFIA

- [11] Cerasoli A.-M., "Calcolo delle probabilità", Zanichelli, BO, 1987
- [12] De Finetti B., "Teoria delle probabilità", Einaudi, TO, 1970
- [13] Monti-Pierobon, "Teoria della probabilità", Zanichelli, BO, 2000
- [14] Scozzafava R., "Primi passi in probabilità...", Zanichelli, BO, 1996
- [15] Lipschultz, "Calcolo delle probabilità", Schaum's, McGraw-Hill, MI, 1994
- [16] Tibone F.-Pezzi G., "La Fisica secondo il PSSC", Zanichelli, BO, 2005
- [17] Boyer C., "Storia della Matematica", Mondadori, MI, 1998

BIBLIOGRAFIA

ARTICOLI DA RIVISTE

Schneider I., "Why do we find the origin of a calculus of probabilities in the 17th century?", D. Reidel Publishing Company, 1980

Kendall M., "Le origini del calcolo delle probabilità", Induzioni, 2/2001

Maturo A., "Sull'assiomatica di Bruno de Finetti...", Periodico di Matematiche, 1/2003

Mortola S., "Dimostrazioni che lasciano senza parole", Archimede, 2/2006

SITI INTERNET

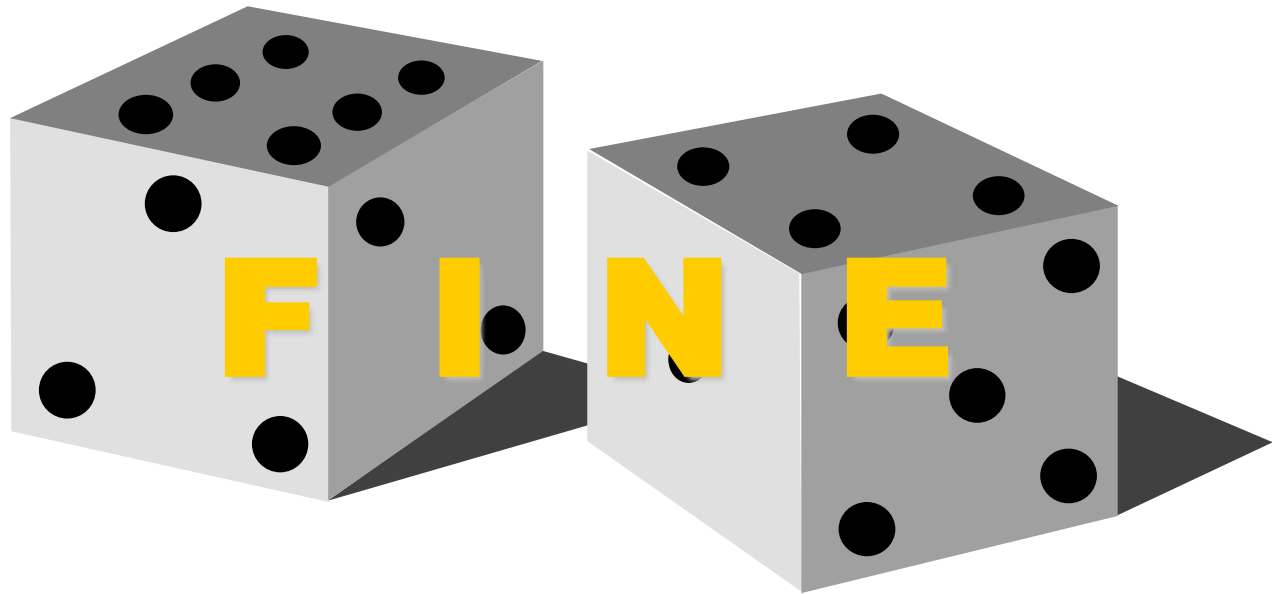
http://www.ds.unifi.it/VL/VL_IT/comb/comb1.html

http://cirdis.stat.unipg.it/files/macchina_galton/protagonisti/galton.htm

<http://www2.dm.unito.it/paginepersonali/garello/chiquadro.pdf>

www.cut-the-knot.org/ctk/August2001.shtml

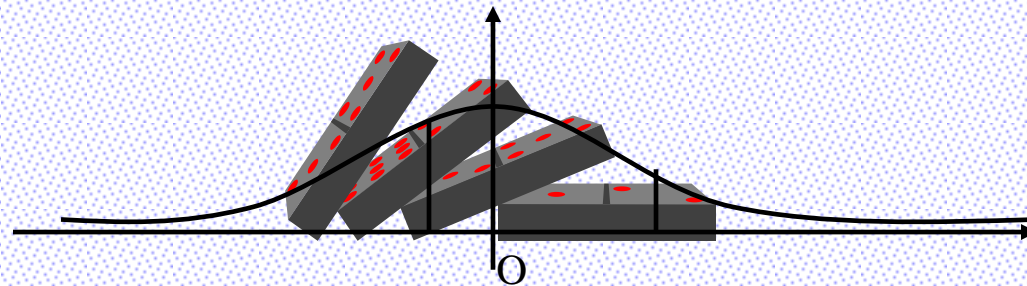
INTRODUZIONE ALLA PROBABILITÀ



DISTRIBUZIONI DI PROBABILITÀ

Luigi Togliani

Liceo Scientifico "Belfiore" - Mantova



Corso di Aggiornamento per docenti - A.I.F. Mantova

"Probabilità e Fisica"

I.T.I.S. "Fermi" - Mantova

17 gennaio 2007

SOMMARIO



⌘ **INTRODUZIONE**

⌘ **VARIABILI ALEATORIE**

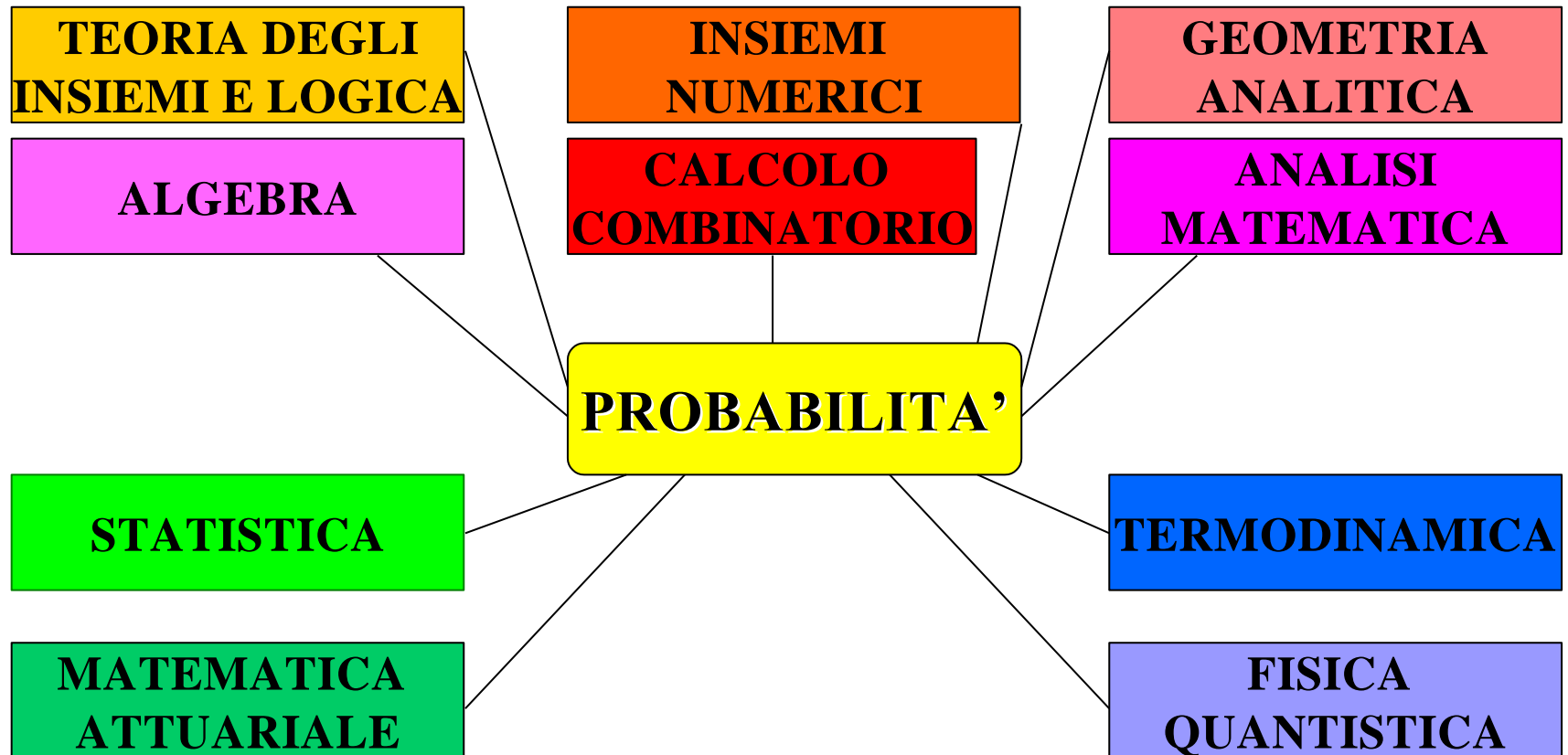
⌘ **DISTRIBUZIONI DI PROBABILITA'**

⌘ **ESPERIMENTI E APPLICAZIONI
INFORMATICHE**

⌘ **ELEMENTI DI STORIA**

⌘ **BIBLIOGRAFIA**

PROBABILITA' E PROGRAMMI D'INSEGNAMENTO



PROBABILITÀ E PROGRAMMI D'INSEGNAMENTO

	Prerequisiti	Destinatari
Concetto di probabilità	Numeri naturali e loro operazioni	Prima liceo
Teoremi sulla probabilità	Insiemi, logica, algebra, funzioni, calcolo combinatorio	Seconda e terza liceo
Distribuzioni di probabilità	Funzioni, geometria analitica, analisi matematica	Quarta e quinta liceo

PROBABILITA' E PROGRAMMI D'INSEGNAMENTO

CM 27-9-96 PNI TRIENNIO LICEO SCIENTIFICO

TEMA 4 - PROBABILITA' E STATISTICA

4.a Statistica descrittiva bivariata: ... Regressione e correlazione

4.b Valutazioni e definizioni di probabilità in vari contesti

4.c Correlazione, indipendenza, formula di Bayes.

4.d Variabili aleatorie in una e *in due dimensioni* (casi finiti)

4.e Variabili aleatorie discrete: distribuzioni binomiale, *geometrica, di Poisson*

4.f Distribuzioni continue. Distribuzione normale ed errori di misura nelle scienze sperimentali. *Distribuzione uniforme. Distribuzione esponenziale.*

4.g Legge dei grandi numeri (Bernoulli)

4.h *Confronti tra le distribuzioni binomiale, di Poisson, normale (mediante la costruzione di tabelle numeriche).*

4.i *Inferenza statistica: stima dei parametri per modelli semplici.*

PROBABILITA' E PROGRAMMI D'INSEGNAMENTO

COMMENTO al tema n. 4 - Probabilità statistica

Gli elementi di calcolo delle probabilità e statistica rispondono all'esigenza di abituare l'alunno ad effettuare modellizzazioni di situazioni in condizioni di incertezza.[...] Una possibile sintesi tra le varie definizioni (di probabilità), che potrà essere effettuata all'ultimo anno, sta nella formalizzazione assiomatica della teoria, che va presentata e motivata sia da un punto di vista storico, sia secondo una giustificazione di comodità per lo sviluppo dell'intera teoria, sia per fornire un ulteriore esempio di teoria matematica espressa in forma ipotetico-deduttiva.[...]Le semplici distribuzioni di probabilità, che saranno trattate se il docente lo ritiene opportuno, sono sufficienti a dare indicazioni non banali sulla problematica di questa parte del calcolo delle probabilità, anche perché sono particolarmente ricche di applicazioni in vari contesti: [...]



PROBABILITA' E PROGRAMMI D'INSEGNAMENTO

Lo studio della curva normale, introdotta anche sperimentalmente, e delle altre distribuzioni fornisce esempi significativi per l'applicazione di metodi e concetti dell'analisi, in particolare attraverso l'eventuale esame dei legami tra le distribuzioni binomiale e poissoniana, binomiale e normale, e mediante la costruzione numerica di tabelle approssimate. La legge dei grandi numeri fornisce un anello che lega i problemi statistici ed i modelli probabilistici permettendo, volendo, di introdurre già alcuni esempi significativi di inferenza. L'insegnante può presentare tale legge dal punto di vista teorico, con eventuale dimostrazione, oppure dal punto di vista empirico presentando al computer simulazioni di tipo bernoulliano.[...]Particolare cura sarà posta nel ricordare le basi storiche e filosofiche (Pascal, empirismo inglese, ecc.).

VARIABILI ALEATORIE

Dato l'insieme $S \neq \emptyset$ e il campo degli eventi $E \subseteq P(S)$

si dice **variabile aleatoria (o casuale)** X una funzione

$X : E \rightarrow \mathbf{R}$, $X(A) = x$ (si scrive anche $X = x$)

X si dice **discreta** se assume un numero **finito** o

numerabile di valori; cioè:

$X(A_1) = x_1, X(A_2) = x_2, \dots, X(A_n) = x_n, \dots$ essendo

$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j, \quad \sum_i P(A_i) = \sum_i p_i = 1$$

Altrimenti X si dice **continua**.

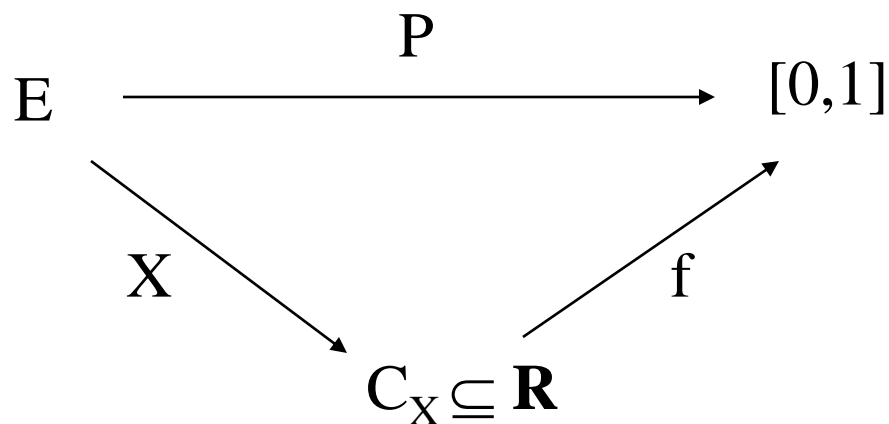
VARIABILI ALEATORIE DISCRETE

Si scrive anche: $P(A_i) = P(X = x_i) = p_i = f(x_i)$

Ovviamente: $p_i = f(x_i) \in [0,1]$. La funzione f si dice

funzione (o legge o distribuzione) di probabilità

della variabile aleatoria X . Quindi $P = f \circ X$



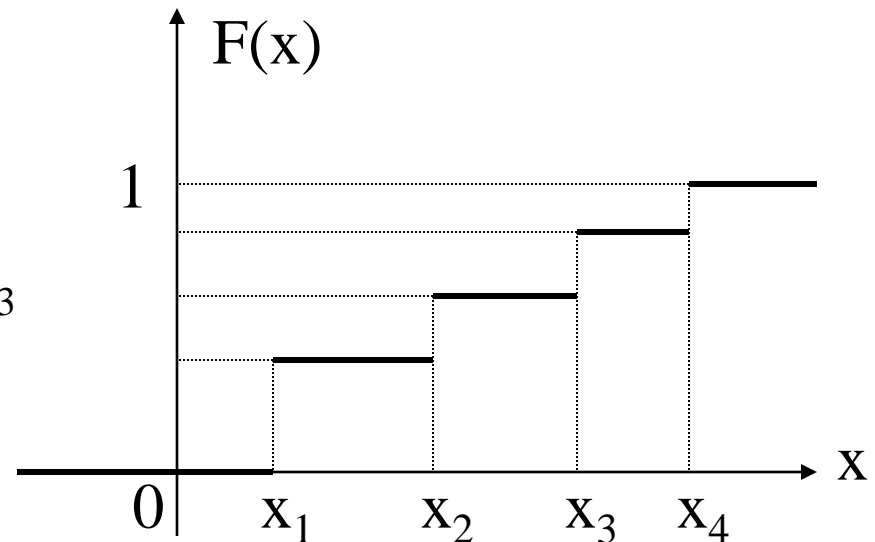
$$\begin{aligned} P(A_i) &= f [X(A_i)] = \\ &= f(x_i) = p_i \end{aligned}$$

VARIABILI ALEATORIE DISCRETE

X variabile casuale discreta. F si dice **funzione di ripartizione** di X se $F : \mathbf{R} \rightarrow [0,1]$, $F(x) = P(X \leq x)$.

Se X è discreta e $C_X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ risulta:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } x < x_1 \\ p_1 & , \text{ se } x_1 \leq x < x_2 \\ p_1 + p_2 & , \text{ se } x_2 \leq x < x_3 \\ \dots & \\ 1 & , \text{ se } x \geq x_n \end{cases}$$



VARIABILI ALEATORIE DISCRETE

Per una variabile aleatoria discreta X definiamo:

⌘ **speranza matematica** (o **media** o **valor medio**)

$$M(X) = m_X = E(X) = \sum_i x_i \cdot p_i$$

⌘ **varianza**

$$V(X) = \sigma^2(X) = \sigma_X^2 = \sum_i (x_i - m_X)^2 \cdot p_i$$

⌘ **scarto quadratico medio** (o **deviazione standard**)

$$\sigma(X) = \sigma_X = \sqrt{V(X)}$$

VARIABILI ALEATORIE DISCRETE

Proprietà di speranza e varianza di X ($a, b \in \mathbf{R}$)

$$\begin{aligned} \text{⌘ } V(X) &= M[(X - m_X)^2] \\ \text{⌘ } V(X) &= M(X^2) - [M(X)]^2 \end{aligned} \quad \leftarrow X^2 \begin{cases} x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n & \dots \end{cases}$$

$$\text{⌘ } M(a \cdot X + b) = a \cdot M(X) + b$$

$$\text{⌘ } V(a \cdot X + b) = a^2 \cdot V(X) \quad \leftarrow$$

$$aX + b \begin{cases} ax_1 + b & ax_2 + b & \dots & ax_n + b & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n & \dots \end{cases}$$

VARIABILE STANDARDIZZATA

Si dice **variabile standardizzata** della variabile X la variabile aleatoria Z così definita:

$$Z = \frac{X - M(X)}{\sigma(X)}$$

Si nota subito che Z è adimensionale.

A che cosa serve Z ? È facile provare che:

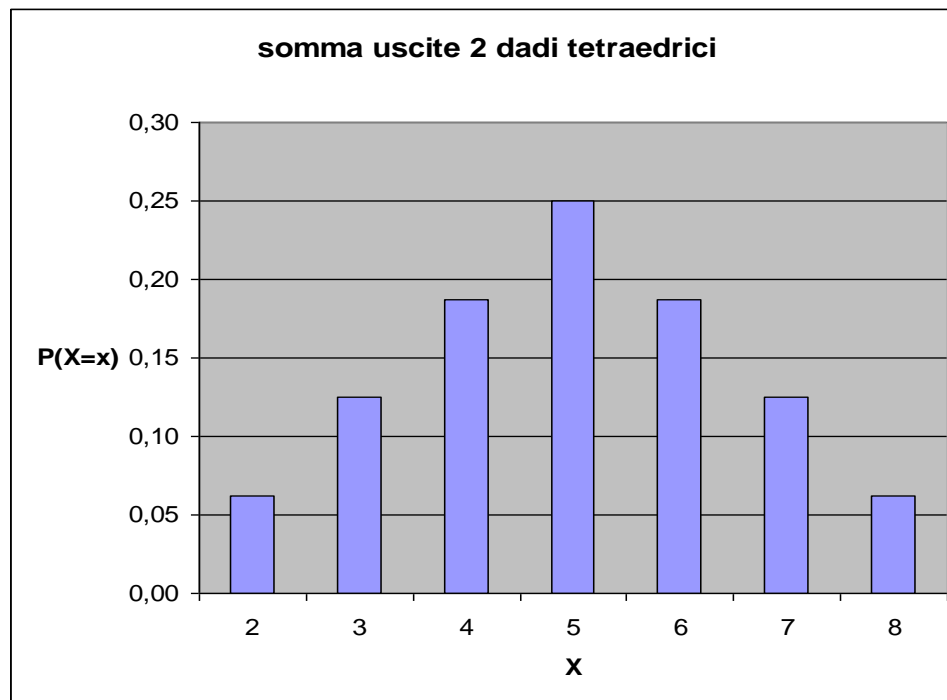
$$M(Z) = 0, \quad V(Z) = \sigma(Z) = 1$$

VARIABILI ALEATORIE DISCRETE

esempi

Studia le variabili aleatorie che danno la somma X e il prodotto Y delle uscite nel lancio di 2 dadi regolari tetraedrici.

X	$P(X=x)$
2	0,0625
3	0,1250
4	0,1875
5	0,2500
6	0,1875
7	0,1250
8	0,0625



$$M(X)=5$$

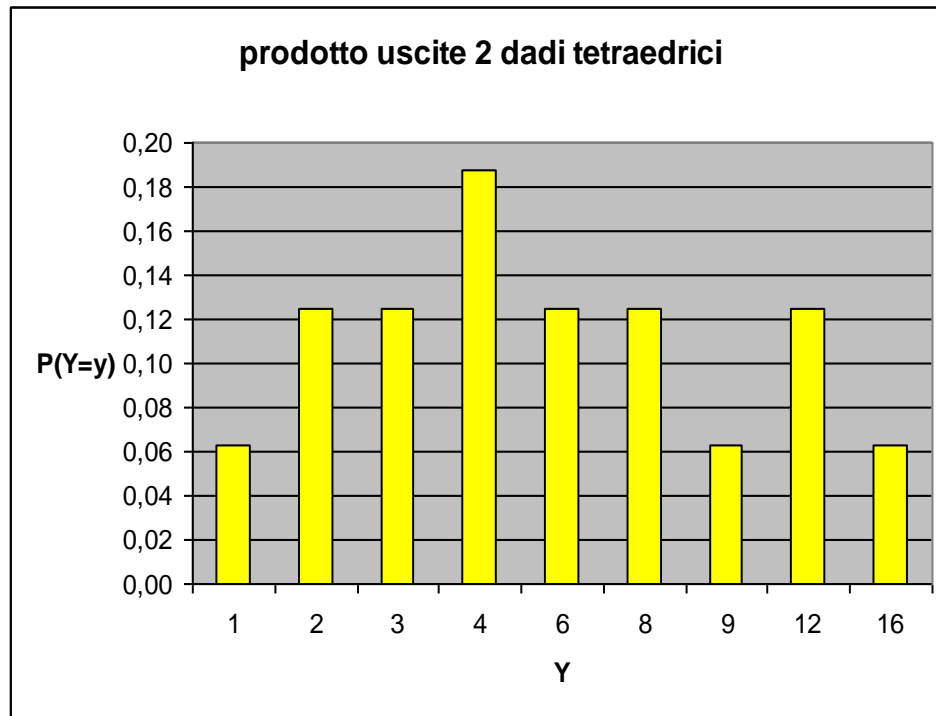
$$V(X)=11/4=2,75$$

$$\sigma(X)\cong 1,66$$

VARIABILI ALEATORIE DISCRETE

esempi

Y	P(Y=y)
1	0,0625
2	0,1250
3	0,1250
4	0,1875
6	0,1250
8	0,1250
9	0,0625
12	0,1250
16	0,0625

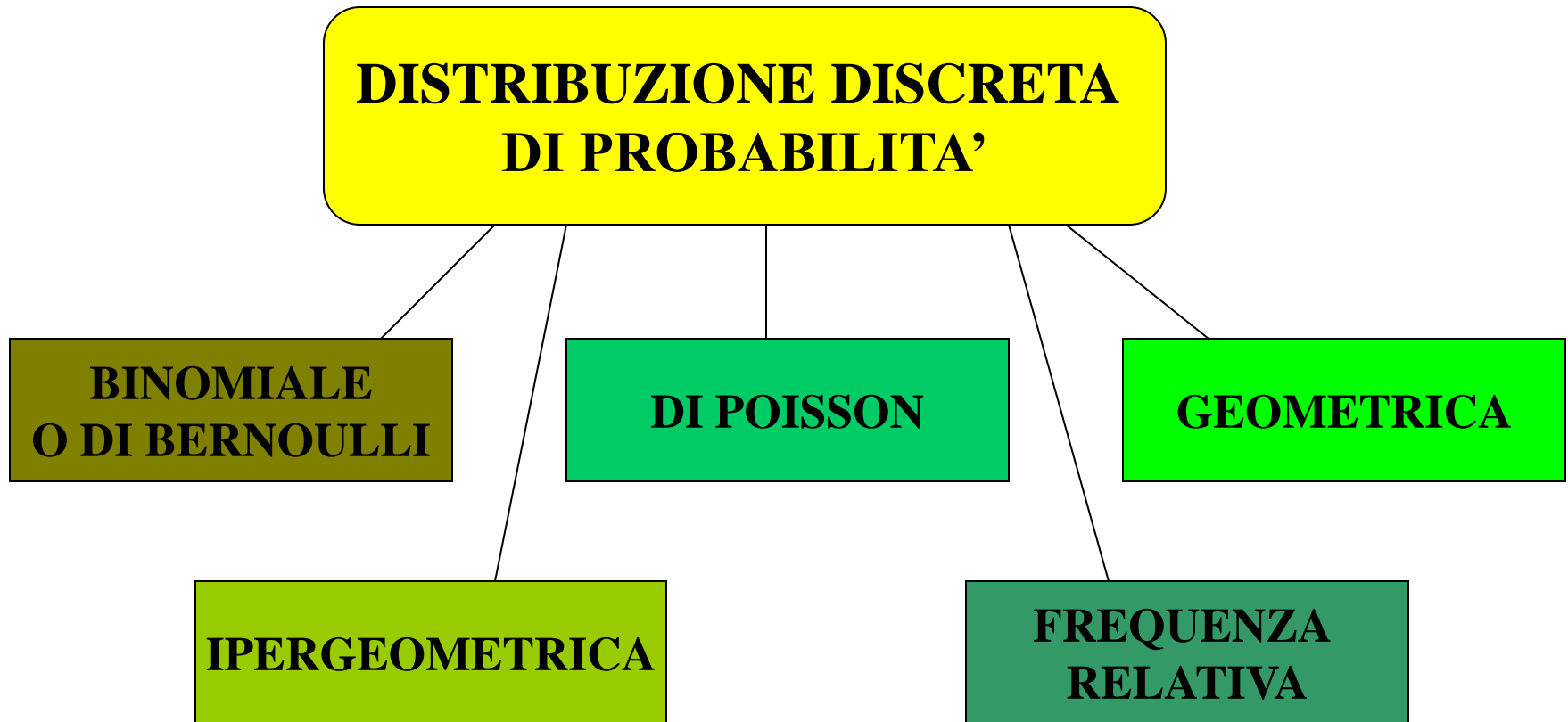


$$M(Y) = 25/4 = 6,25$$

$$V(Y) = 165/9 \cong 18,3$$

$$\sigma(Y) \cong 4,28$$

ALCUNE DISTRIBUZIONI DISCRETE DI PROBABILITA'



DISTRIBUZIONE BINOMIALE O BERNOULLIANA

L'evento A (successo) ha $P(A) = p$ costante. Posto $P(A') = q$ (ovviamente $q = 1 - p$), la variabile X dà il **numero di successi** di A su n prove. X ha la distribuzione **binomiale** o di **Bernoulli** di probabilità:

$$f(x) = p_x = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, \text{ con } x = 0, 1, \dots, n$$

$$\sum_{x=0}^n p_x = \sum_{x=0}^n \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = (p + q)^n = 1$$

Risulta: $M(X) = n p$, $V(X) = n p q$; n , p si dicono **parametri**.

DISTRIBUZIONE BINOMIALE

esempio

LANCI DI UN DADO TETRAEDRICO

X : n° di uscite '3' su $n = 10$ lanci

$P(A) = p = 0,25$; $q = 0,75$

$M(X) = np = 2,50$

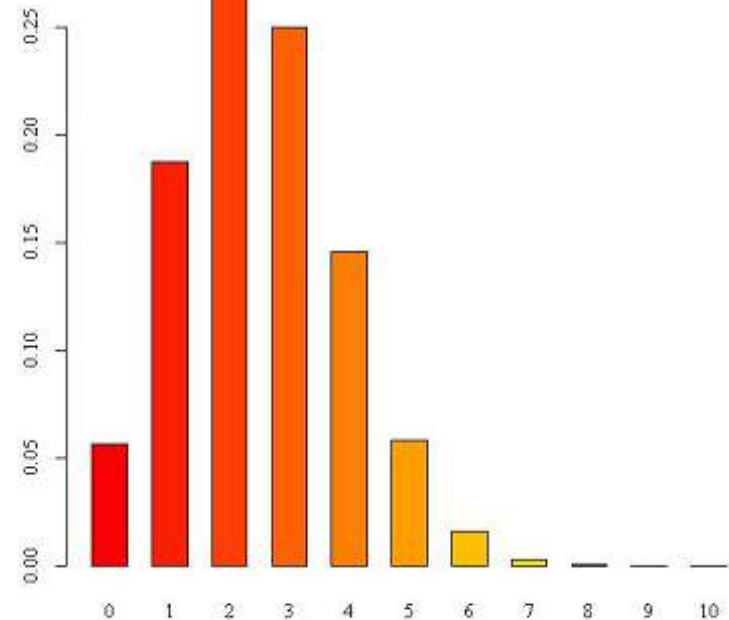
$V(X) = npq \cong 1,88$; $\sigma \cong 1,37$

$P(3 \leq X < 5) =$

$$= \binom{10}{3} \cdot 0,25^3 \cdot 0,75^7 + \binom{10}{4} \cdot 0,25^4 \cdot 0,75^6 \cong$$

$$\cong 0,25028 + 0,14600 \cong 39,63\%$$

Distribuzione binomiale, $n = 10$, $p = 0.25$



DISTRIBUZIONE BINOMIALE

Triangolo di Tartaglia-Pascal

$$(a+b)^0$$

Hexstat, Harcourt,
USA, 1965

$$1 = 2^0$$

$$(a+b)^1$$

$$1+1 = 2^1$$

$$(a+b)^2$$

$$1+2+1 = 2^2$$

$$(a+b)^3$$

$$1+3+3+1 = 2^3$$

$$(a+b)^4$$

$$1+4+6+4+1 = 2^4$$

$$(a+b)^5$$

$$1+5+10+10+5+1 =$$

$$2^5$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k, \quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

binomio di Newton

p_k

formula di Stifel

DISTRIBUZIONE BINOMIALE

Triangolo di Tartaglia-Pascal

Triangolo di Pascal e probabilità: lancio ripetuto di una moneta.

Ad es. su $n = 5$ lanci calcolare la probabilità che esca testa $x = 3$ volte è $10/32$:

1 5 10 10 5 1 ← 5^a riga

Cioè:

$$P(X = 3) = \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{10}{32}$$

10 è il n° di tutti i possibili percorsi che, partendo dalla cima del triangolo di Pascal, portano al punto d'arrivo considerato, su un totale di 32 che arrivano sulla 5^a riga del triangolo stesso.

Esperimento del 12/12/06 (prof. Francesio): $n=6$; su 2017 lanci di 6 monete:

freq. ass. 28 174 479 653 462 192 29

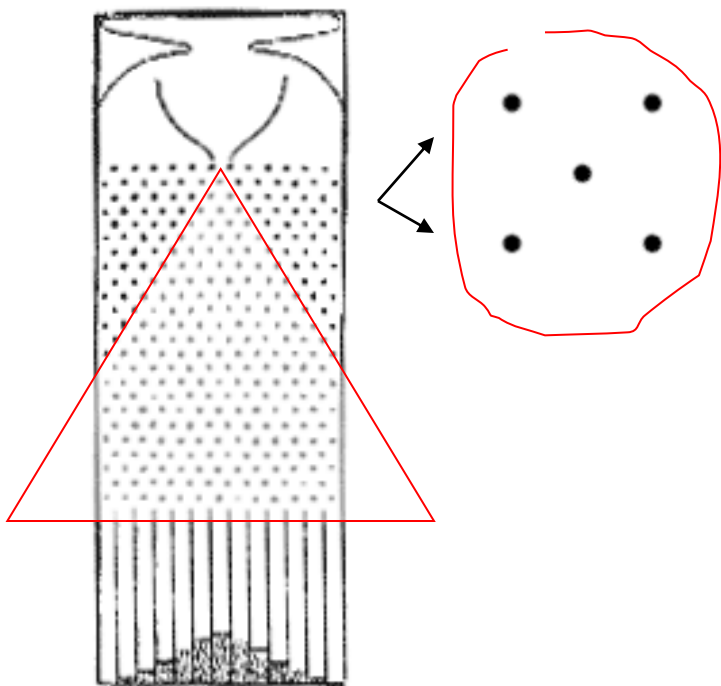
freq. rel. 0,014 0,086 0,237 0,324 0,223 0,095 0,014

probab. 0,015 0,094 0,234 0,313 0,234 0,094 0,015

DISTRIBUZIONE BINOMIALE

Macchina di Galton

Quincunx (quinconce) o macchina (tavola) di Galton (1877)

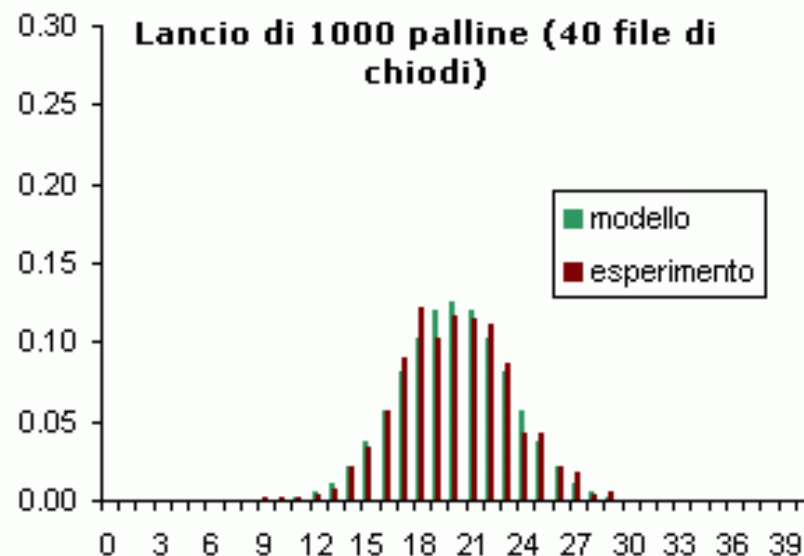
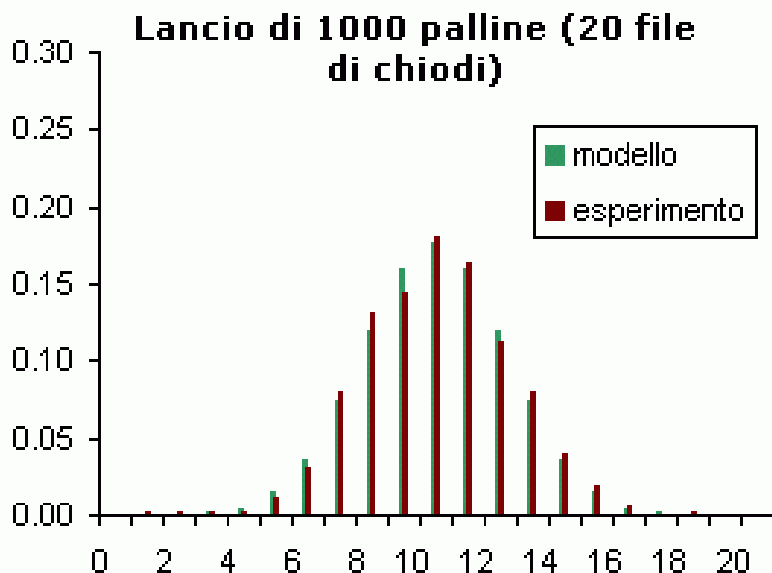


I chiodi sono disposti come il '5' nel dado. Le file di chiodi che interessano sono solo quelle in cui la pallina tocca un solo chiodo, così come i chiodi e le scanalature sono solo quelli che possono far parte del percorso della pallina. La prima fila di chiodi è costituita da un solo chiodo, la seconda da due, e così via. Il numero dei chiodi nell'ultima fila è uguale al numero di file della macchina. In una macchina di Galton con n file di chiodi ci sono $n+1$ scanalature.

- ⌘ Bellodi-Francesio-Pezzi-Puviani, *Linguaggio Pascal*, Zanichelli, BO
- ⌘ Film "Eventi casuali", *La Fisica secondo il PSSC* (DVD 1), Zanichelli, BO
- ⌘ http://cirdis.stat.unipg.it/files/macchina_galton/protagonisti/galton.htm

DISTRIBUZIONE BINOMIALE

Macchina di Galton



La probabilità che la pallina cada nella k-esima scanalatura su n file di chiodi è

$$\binom{n}{k} \cdot 0,5^n$$

DISTRIBUZIONE DI POISSON

Dato il **parametro** reale positivo λ , la variabile aleatoria discreta X ha distribuzione di **Poisson** se:

$$f(x) = p_x = P(X = x) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!}, \text{ con } x = 0, 1, \dots, n, \dots$$

$$\sum_{x=0}^{+\infty} p_x = e^{-\lambda} \cdot \sum_{x=0}^{+\infty} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$$

Risulta: $M(X) = V(X) = \lambda$. Si applica ad eventi ‘rari’.

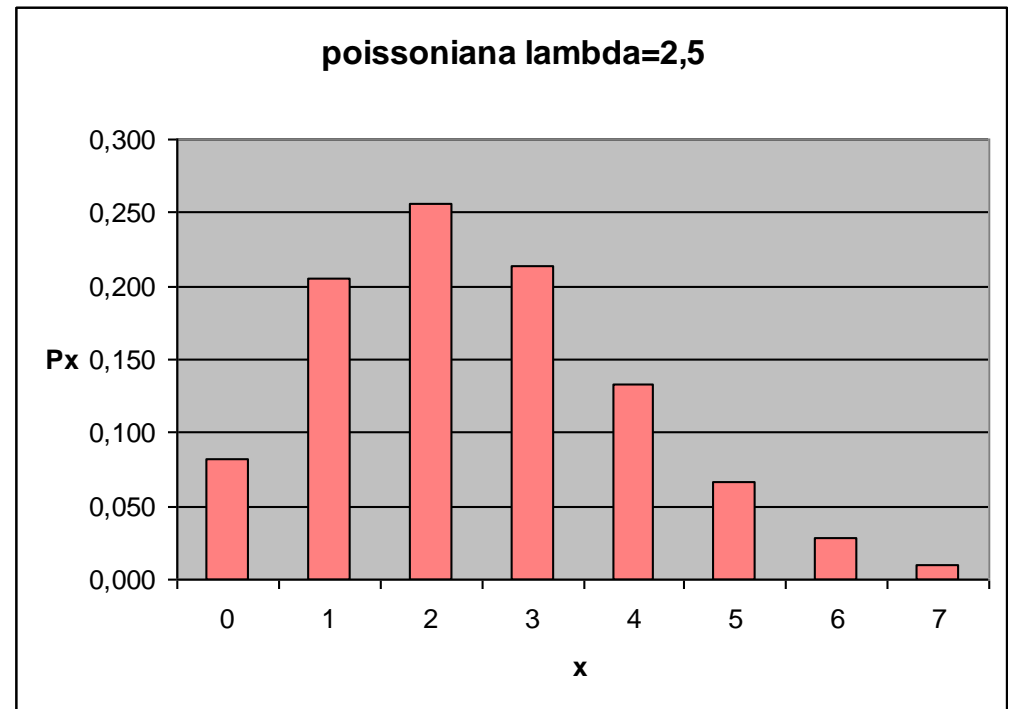
Formula di Stirling: $n! \approx \sqrt{2\pi n} \cdot n^n e^{-n}$

DISTRIBUZIONE DI POISSON

esempi

Distribuzione di Poisson $\lambda = 2,5 = M(X) = V(X)$

x	Px
0	0,08208
1	0,20521
2	0,25652
3	0,21376
4	0,13360
5	0,06680
6	0,02783
7	0,00994



DISTRIBUZIONE DI POISSON

esempi

AL SOCCORSO STRADALE

Al soccorso stradale arrivano in media 48 chiamate al giorno, due in media all'ora, secondo una distribuzione di Poisson.

- Calcola la probabilità che nella 1^a ora arrivino almeno 2 chiamate.
- Calcola la probabilità che il tempo di attesa fino alla 1^a chiamata sia di almeno un'ora. (*Mat. Scient. PNI 1996, sess. suppl.*)

X: numero di chiamate in un'ora. $M(X) = \lambda = 2$

a) $P(X \geq 2) = 1 - P(X=0) - P(X=1) = 1 - e^{-2} - 2e^{-2} \cong 59,4\%$

b) Equivale a: 'nella 1^a ora non giungono chiamate', cioè:

$$P(X=0) = e^{-2} \cong 13,5\%$$

DISTRIBUZIONE DI POISSON

esempi

CONTROLLO DI QUALITA'

Una ditta produce in media l'8% di pezzi difettosi. Qual è la probabilità che su un campione di 10 pezzi si trovi più di un pezzo difettoso?

X : numero di pezzi difettosi prodotti.

$P = 0,08$, $q = 0,92$, $n = 10$, $M(X) = \lambda = np = 0,8$ (poissoniana)

$P(X > 1) = 1 - P(X=0) - P(X=1) = 1 - e^{-0,8}/0! - e^{-0,8} \cdot 0,8/1! \cong 19,1\%$

Con la binomiale: $P(X > 1) \cong 18,8\%$

DISTRIBUZIONE GEOMETRICA

X è una variabile aleatoria con distribuzione **geometrica** se fornisce il numero delle prove da effettuare per ottenere il 1° successo di un evento A in cui $P(A) = p$.

$$f(x) = p_x = P(X = x) = pq^{x-1}, \text{ con } x = 1, 2, \dots, n, \dots$$

$$\sum_{x=1}^{+\infty} p_x = p \cdot \sum_{x=1}^{+\infty} q^{x-1} = p \frac{1}{1-q} = 1 \quad \leftarrow \text{serie geometrica}$$

Risulta: $M(X) = 1 / p$, $V(X) = q / p$, con $q = 1 - p$.

L'unico **parametro** della distribuzione è p .

DISTRIBUZIONE GEOMETRICA

esempi

TIRARE UN DADO

Calcola la probabilità che, tirando un dado, il 6 esca:

- a) per la prima volta tra il 3° e il 5° lancio inclusi;
- b) per la prima volta in uno dei primi 5 lanci, non importa quando;
- c) una sola volta su 5 lanci, non importa quando.



DISTRIBUZIONE GEOMETRICA

esempi

X: n° di lanci per ottenere 6 per la prima volta, $p = 1/6$, $q = 5/6$.

$$\begin{aligned} \text{a) } P(3 \leq X \leq 5) &= pq^2 + pq^3 + pq^4 = \\ &= \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 \cong 29,3\% \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) &= \\ &= p + pq + pq^2 + pq^3 + pq^4 \cong 59,8\% \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } P(A) &= pq^4 + pq^4 + pq^4 + pq^4 + pq^4 = \\ &= 5pq^4 = 5 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 \cong 40,2\% \end{aligned}$$

DISTRIBUZIONE IPERGEOMETRICA

Popolazione di N individui: a hanno un certo carattere, $b = N - a$ non lo hanno. Su n individui **estratti in blocco**, la v.a. **ipergeometrica** X fornisce il numero di quelli col carattere dato. Quindi $X = 0, 1, \dots, n$; $0 \leq x \leq n \leq N = a + b$

$$P(X = x) = \frac{\binom{Np}{x} \cdot \binom{Nq}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \quad \text{con } p = \frac{a}{N}, q = \frac{b}{N}$$

$$M(X) = np = \frac{na}{N}, \quad V(X) = \frac{npq(N-n)}{N-1}$$

DISTRIBUZIONE IPERGEOMETRICA esempi

ESTRAZIONI DA UN'URNA

Un'urna contiene 4 palline rosse e 6 bianche. Determina la probabilità di avere 3 palline bianche su 5 estratte in blocco (senza reinserimento).

Si ha: $a = 6$; $b = 4$; $n = 5$; $N = 10$; dunque:

$$P(X = 3) = \frac{\binom{6}{3} \cdot \binom{4}{2}}{\binom{10}{5}} = \frac{10}{21} \cong 46,6\%$$

casi favorevoli

casi possibili

DISTRIBUZIONE DELLA FREQUENZA RELATIVA

X / n è la **frequenza relativa** di successo, su n prove, di un evento di probabilità fissa p , su una popolazione ampia N .

$X = 0, 1, 2, \dots, n$; la speranza è: $M(X) = p$.

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, \quad V(X) = \frac{pq}{n} \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{estrazione con reinserimento} \\ \text{(bernoulliana)} \end{array}$$

$$P(X = x) = \frac{\binom{Np}{x} \binom{Nq}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \quad V(X) = \frac{pq}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1} \quad \leftarrow \text{estrazione in blocco}$$

DISTRIBUZIONE DELLA FREQUENZA RELATIVA esempi

CONSUMATORI

La frazione di consumatori di un certo prodotto è 0,6. Si estrae da una popolazione di 100 individui un campione di 5 unità: calcolare la probabilità che tra gli estratti vi sia un consumatore.

$p = 0,6$; $q = 0,4$; $n = 5$; $N = 100$; allora:

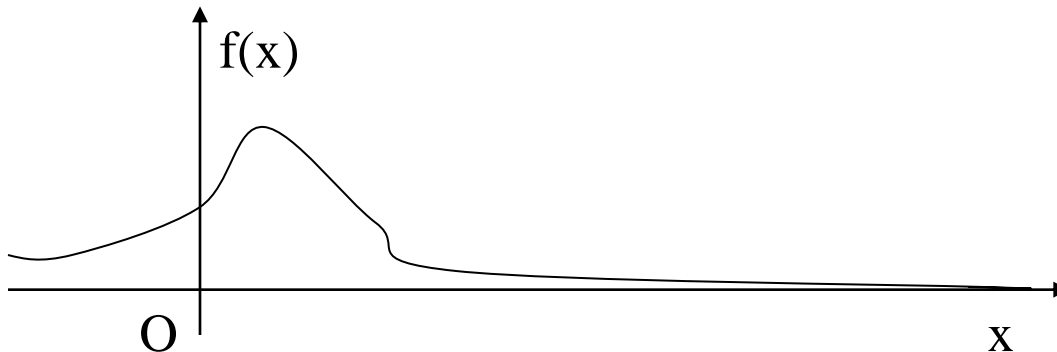
$$P(X = 1) = \binom{5}{1} 0,6^1 \cdot 0,4^4 \cong 7,68\% \quad \text{se l'estrazione è bernoulliana}$$

$$P(X = 1) = \frac{\binom{60}{1} \cdot \binom{40}{4}}{\binom{100}{5}} \cong 7,28\% \quad \text{se l'estrazione è in blocco (senza reinserimento)}$$

VARIABILI ALEATORIE CONTINUE

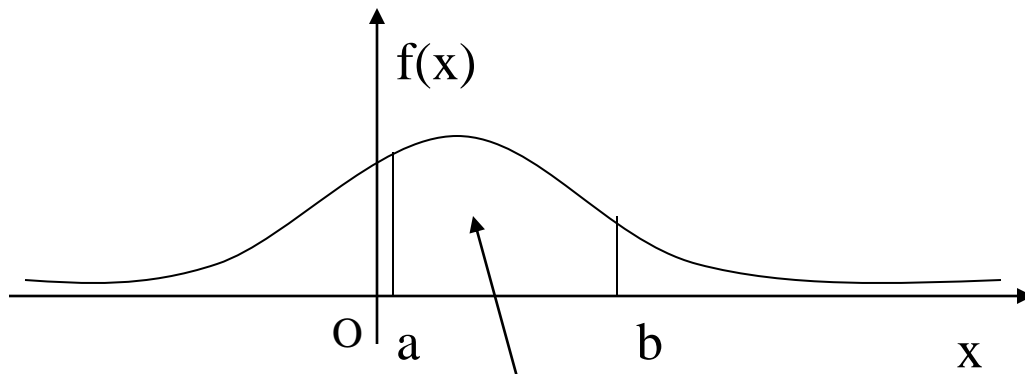
La funzione $f(x)$ è la **densità di probabilità** della variabile aleatoria continua X se:

$$i) f(x) \geq 0 \quad \forall x \in C_X \subseteq \mathbf{R} \quad ; \quad ii) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$



VARIABILI ALEATORIE CONTINUE

La **probabilità** che X assuma valori tra a e b è:

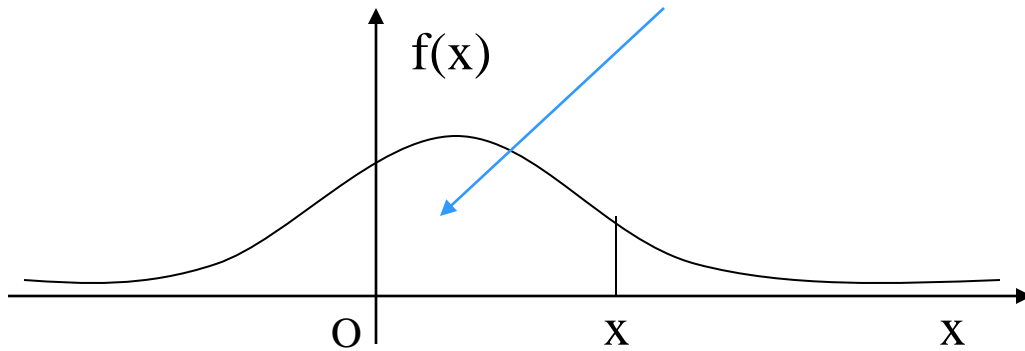
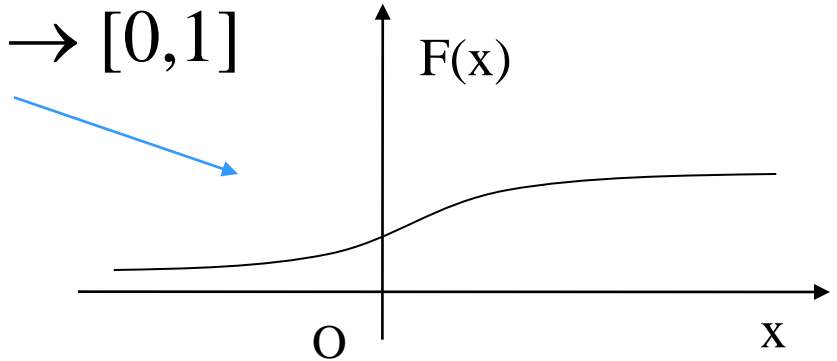


$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx = P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a < X \leq b)$$

VARIABILI ALEATORIE CONTINUE

Funzione di ripartizione $F : \mathbf{R} \rightarrow [0,1]$

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$



F non decresce;

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$$

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a)$$

VARIABILI ALEATORIE CONTINUE

Speranza matematica (o media o valor medio):

$$M(X) = m_X = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx$$

Varianza:

$$V(X) = \sigma^2(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_X)^2 \cdot f(x) dx$$

Scarto quadratico medio (o deviazione standard):

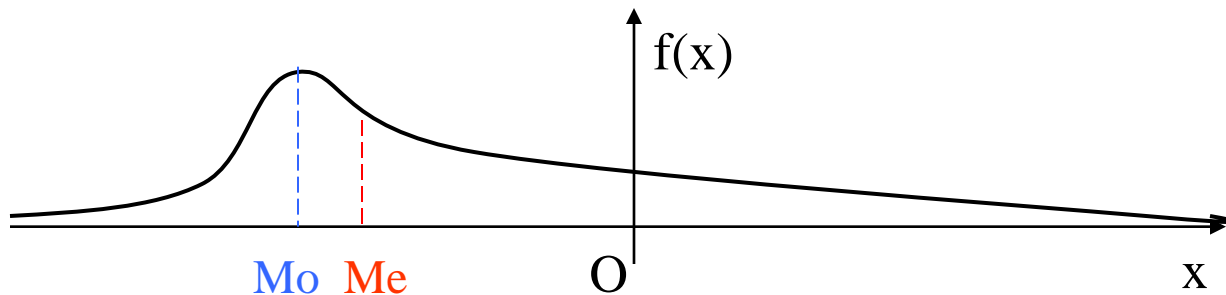
$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

VARIABILI ALEATORIE CONTINUE

Mediana: è il numero reale **Me** tale che

$$\int_{-\infty}^{Me} f(x)dx = \int_{Me}^{+\infty} f(x)dx = \frac{1}{2}$$

Moda: è il valore **Mo** di X per cui f(x) è massima.



VARIABILI ALEATORIE CONTINUE

esempi

DISTRIBUZIONE DI CAUCHY

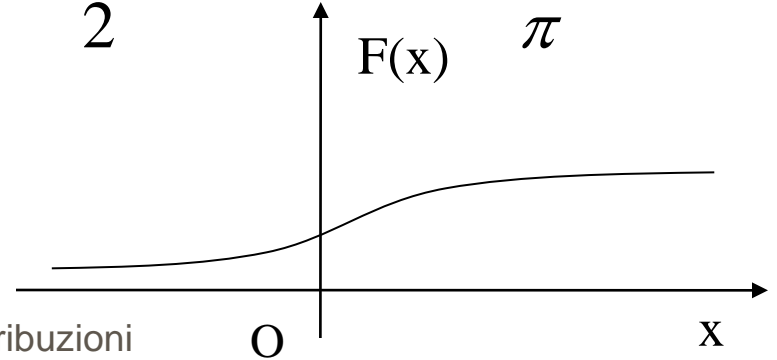
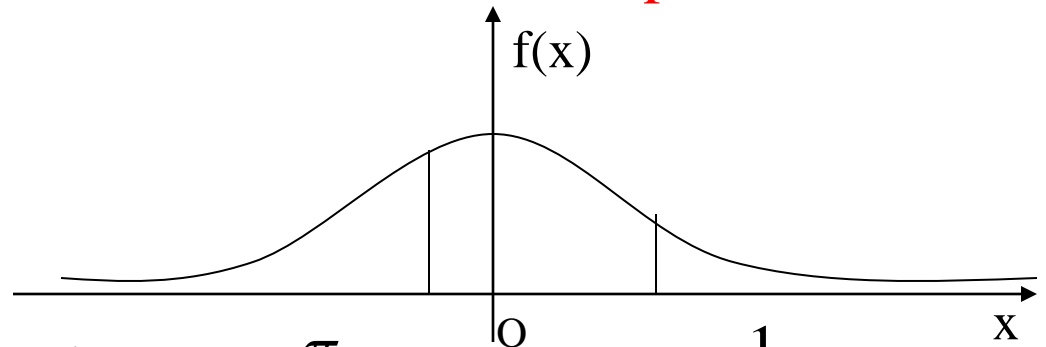
Per quale valore di $a > 0$ la var. al. X ha densità di probabilità:

$$f(x) = \frac{a}{x^2 + 1} \quad ?$$

Dev'essere:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{x^2 + 1} dx = a \lim_{k \rightarrow +\infty} [\arctg x]_{-k}^k = 2a \cdot \frac{\pi}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{\pi}$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{a}{t^2 + 1} dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctg x$$



VARIABILI ALEATORIE CONTINUE

esempi

Rappresentano esempi di distribuzioni di probabilità le funzioni:

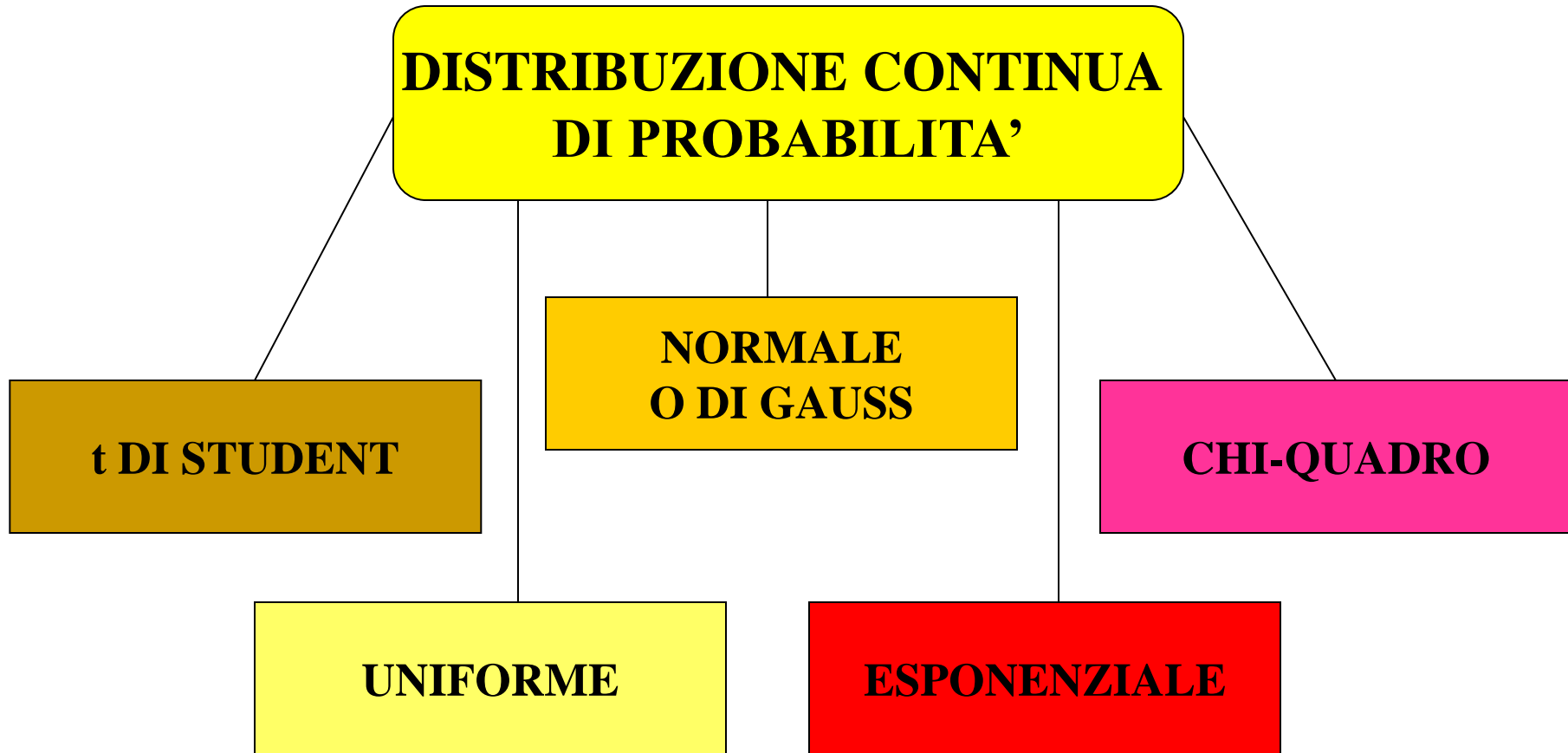
$$f(x) = k\sqrt{(1-x^2)^{\nu-3}} \quad , \quad -1 \leq x \leq 1$$

$$f(x) = k \cdot x^{\nu-2} (1+x^2)^{-\nu/2}$$

$$f(x) = k(1+x^2)^{-\nu/2}$$

$$f(x) = k \cdot \text{sen}^{\nu-2} x \quad , \quad -\pi/2 \leq x \leq \pi/2$$

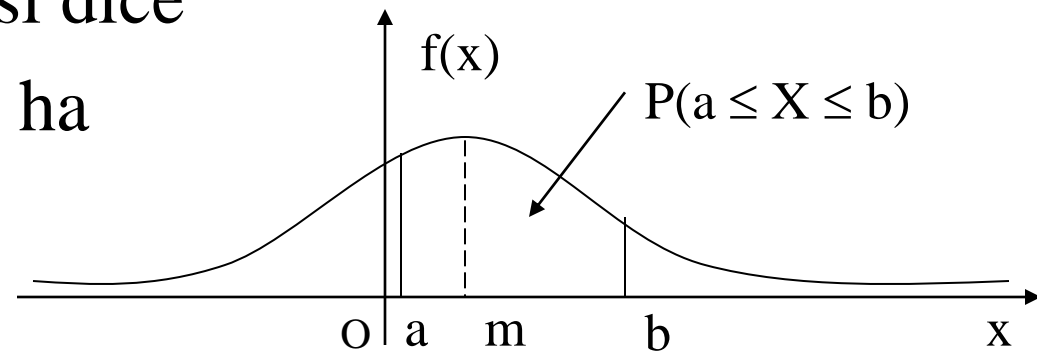
ALCUNE DISTRIBUZIONI CONTINUE DI PROBABILITA'



DISTRIBUZIONE NORMALE O GAUSSIANA

La variabile aleatoria X si dice **normale** o **gaussiana** se ha **densità di probabilità:**

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$



Risulta: $M(X) = Me(X) = Mo(X) = m$, $V(X) = \sigma^2$,
Quindi la normale ha media, moda e mediana uguali.

DISTRIBUZIONE NORMALE O GAUSSIANA

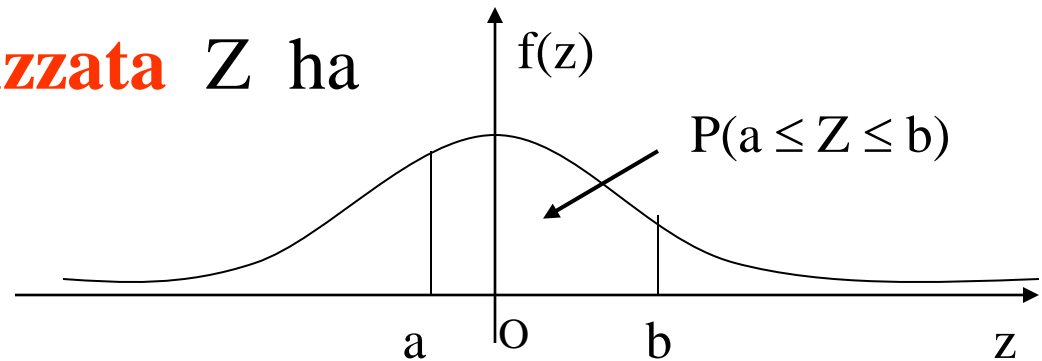
La **normale standardizzata** Z ha
densità di probabilità:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

Dal risultato noto

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \quad \text{segue che:}$$

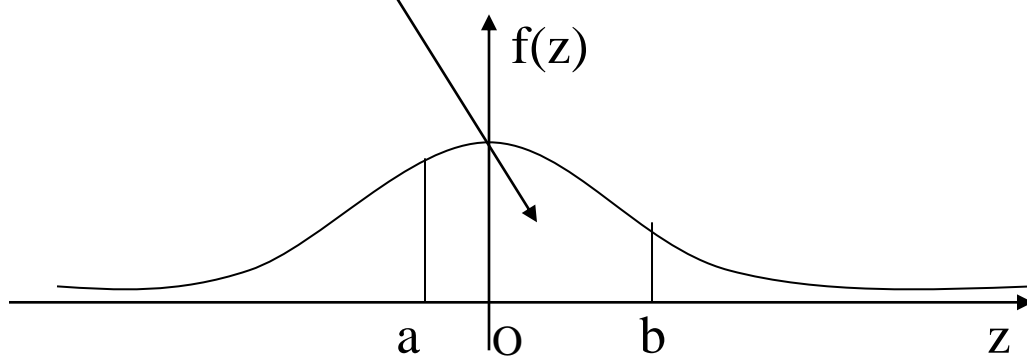
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(z) dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 1$$



DISTRIBUZIONE NORMALE O GAUSSIANA

La **probabilità** risulta:

$$P(a \leq Z \leq b) = \int_a^b f(z) dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$



Si usano le **tavole** per calcolare la probabilità, per $z \geq 0$.

DISTRIBUZIONE NORMALE O GAUSSIANA

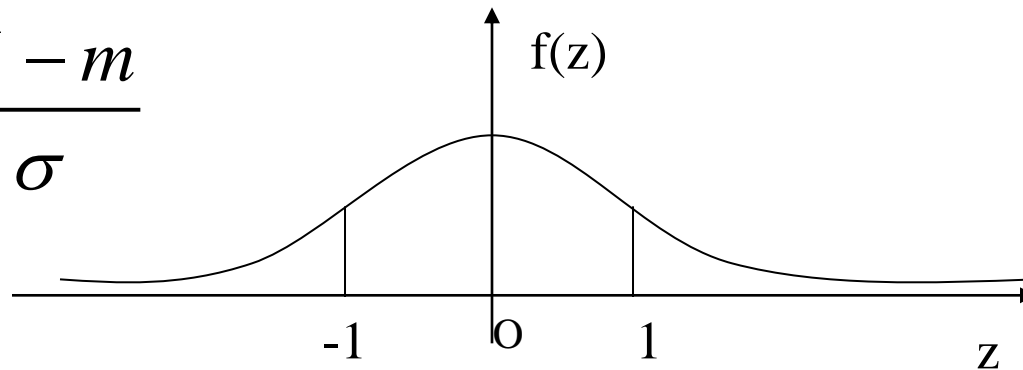
Regola dei tre sigma:

$$P(-\sigma + m < X < \sigma + m) = 2P(0 \leq Z < 1) \cong 68,3\%$$

$$P(-2\sigma + m < X < 2\sigma + m) = 2P(0 \leq Z < 2) \cong 95,4\%$$

$$P(-3\sigma + m < X < 3\sigma + m) = 2P(0 \leq Z < 3) \cong 99,7\%$$

con $Z = \frac{X - m}{\sigma}$



DISTRIBUZIONE NORMALE O GAUSSIANA

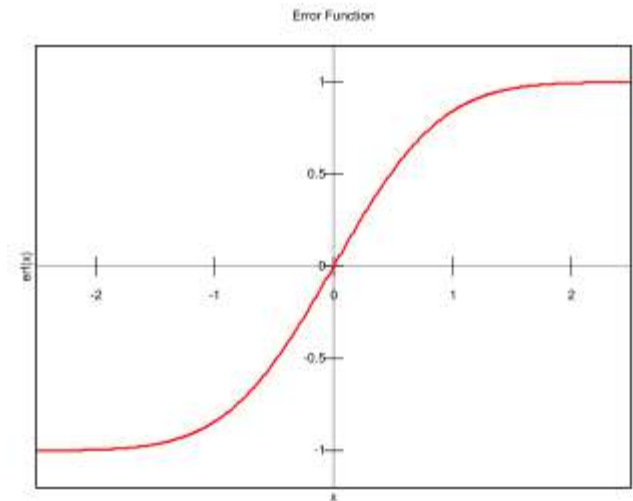
Si definisce **funzione degli errori (di Gauss) o di Laplace**:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

Si dimostra che:

$$F(x) = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right) \right]$$

con F **funzione di ripartizione della normale standardizzata**. La $\operatorname{erf}(x)$ è sviluppabile in serie di Taylor.



DISTRIBUZIONE NORMALE O GAUSSIANA esempi

COMPITI IN CLASSE

In un compito il punteggio medio è 6,5 con sqm 1,5. Qual è la probabilità che un voto sia compreso tra 5 e 6? Quanti studenti avranno un tale voto se il numero totale è di 28 alunni?

Se i voti X sono normodistribuiti con: $m = 6,5$ e $\sigma = 1,5$, allora:
 $P(5 < X < 6) = P(-1 < Z < -1/3) = P(0 < Z < 1) - P(0 < Z < 1/3) \cong 0,2120$.
Il n° degli studenti con tale voto: $0,2120 \cdot 28 \cong 6$.

DISTRIBUZIONE NORMALE O GAUSSIANA esempi

ERRORI DI FABBRICA

La produzione di un pezzo da 20,0 cm presenta un errore con $\sigma = 0,2$ cm. Qual è la probabilità che la lunghezza differisca dal valore dato meno di 0,3 cm?

Se la lunghezza X è normodistribuita con $m = 20$ cm, $\sigma = 0,2$ cm:
$$P(|X-20\text{cm}| < 0,3) = P(19,7\text{cm} < X < 20,3\text{cm}) = P(-1,5 < Z < +1,5) =$$
$$= 2 \cdot P(0 < Z < +1,5) \cong 2 \cdot 0,4332 \cong 86,64\% , \text{ ove } Z = (X-m)/\sigma .$$

DISTRIBUZIONE **t** DI STUDENT

La distribuzione **t di Student** ha densità di probabilità:

$$f(x) = H_\nu \left(1 + \frac{x^2}{\nu} \right)^{-\frac{\nu+1}{2}}, \quad \nu \in \mathbb{N}$$

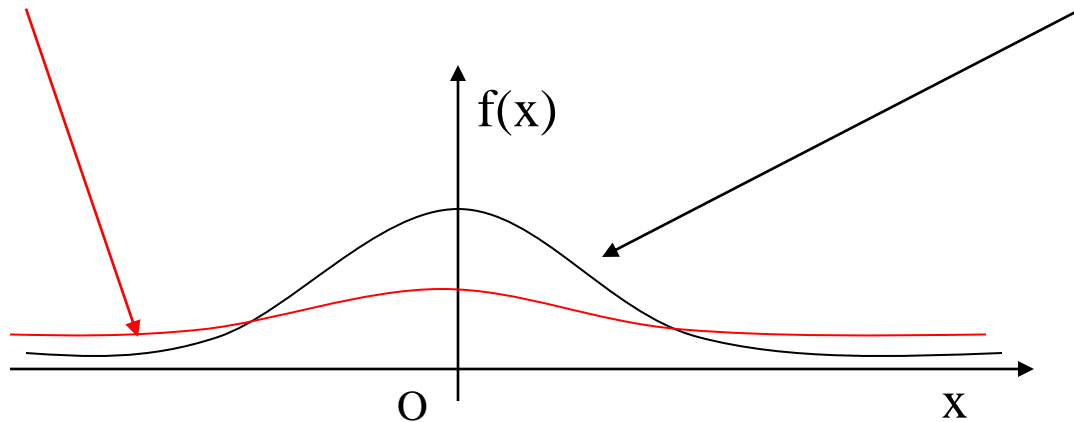
ove il **parametro** ν dà i **gradi di libertà** di T e H_ν è una costante positiva che dipende da ν in modo che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

Risulta: $M(T) = 0$, $V(T) = \frac{\nu}{\nu - 2}$, con $\nu > 2$

DISTRIBUZIONE t DI STUDENT

T tende alla normale standardizzata Z se $\nu \rightarrow +\infty$



La densità di T è una curva più aperta di quella di Z .

I valori della probabilità di T sono tabulati.

DISTRIBUZIONE t DI STUDENT

Uso delle **tavole**.

Forniscono, al variare di

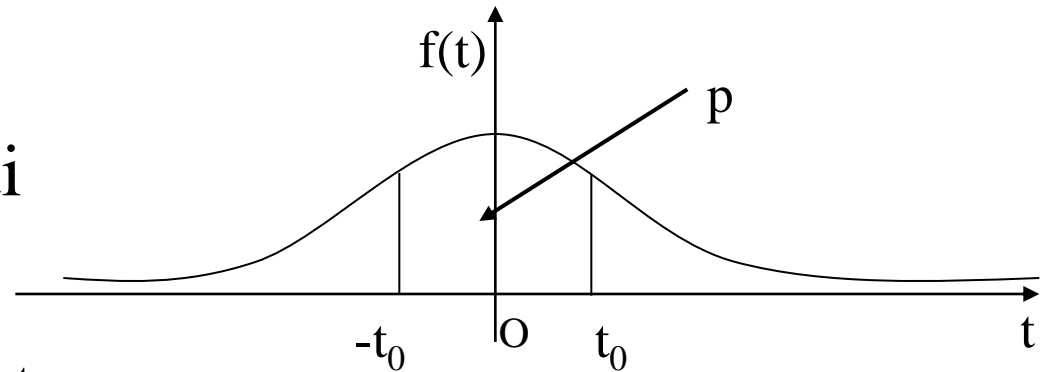
ν , il valore di t_0 , con

$p = P(-t_0 \leq T \leq t_0)$ fissata.

Ad es. se $\nu = 15$, $p = 95\%$ allora $t_0 = 2,131$

e se $\nu = 15$, $p = 90\%$ allora $t_0 = 1,753$.

Uso di T : in statistica per piccoli campioni.

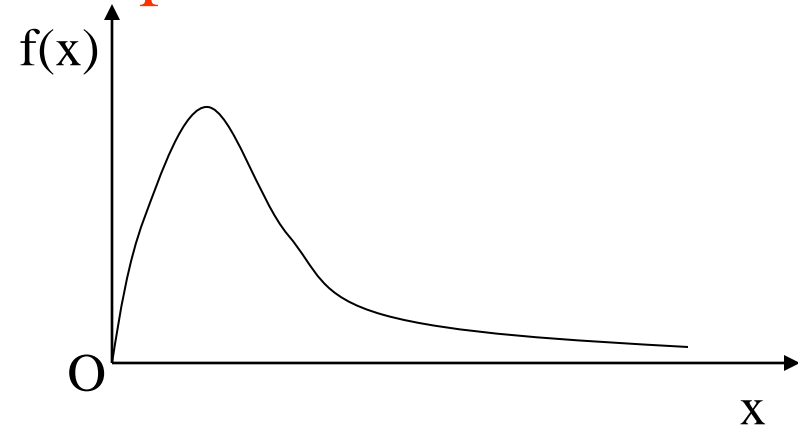


DISTRIBUZIONE χ^2 CHI-QUADRO

La v. a. **chi-quadro** χ^2 ha **densità di probabilità**:

$$f(x) = \begin{cases} K_\nu \cdot x^{\frac{\nu}{2}-1} \cdot e^{-\frac{x}{2}} & , x > 0 \\ 0 & , x \leq 0 \end{cases}$$

Il **parametro** $\nu \in \mathbf{N}$ esprime i **gradi di libertà** di χ^2 e K_ν è



una costante positiva che dipende da ν in modo che:

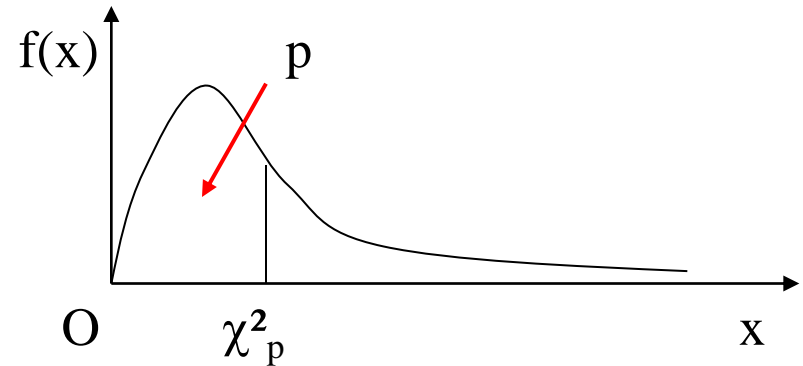
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

Risulta: $M(\chi^2) = \nu$, $V(\chi^2) = 2\nu$

DISTRIBUZIONE χ^2 CHI-QUADRO

Uso delle **tavole**.

Forniscono, al variare di v , il valore di χ^2_p , dove p è la probabilità fissata.



Ad es. se $v = 5$, $p = 95\%$ allora $\chi^2_p = 11,1$
e se $v = 5$, $p = 90\%$ allora $\chi^2_p = 9,24$.

Uso di χ^2 : confronto tra distribuzioni di frequenze osservate e di frequenze teoriche (statistica).

DISTRIBUZIONE χ^2

CHI-QUADRO applicazioni

TEST CHI-QUADRO: BONTA' DELL'ADATTAMENTO

Campione di n unità; $i = 1, 2, \dots, k$ con $\sum_{i=1}^k f_i = n = \sum_{i=1}^k a_i$
 f_i frequenze osservate (empiriche)

a_i frequenze attese (teoriche) secondo un certo modello che può presentare r parametri

gradi di libertà $\nu = k - r - 1$

chi-quadro $\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(f_i - a_i)^2}{a_i}$

DISTRIBUZIONE χ^2

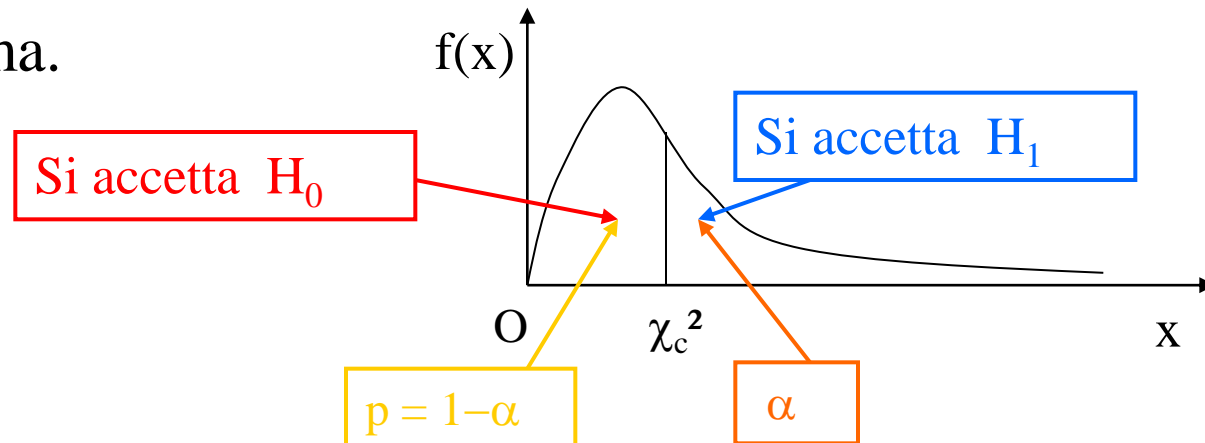
CHI-QUADRO applicazioni

Possono presentarsi i due casi:

⌘ $H_0 : \chi^2 < \chi_c^2 \rightarrow$ il modello si adatta bene (*ipotesi nulla*)

⌘ $H_1 : \chi^2 \geq \chi_c^2 \rightarrow$ il modello non si adatta bene (*ip. alternativa*)

χ_c^2 si legge sulle tavole in base al **livello di significatività α** dato (o al **livello di confidenza o di fiducia $p = 1 - \alpha$**) e ai **gradi di libertà v** del problema.



DISTRIBUZIONE χ^2

CHI-QUADRO esempi

IL DADO E' TRUCCATO?

Stabilisci se, al livello di significatività $\alpha = 5\%$, è truccato un dado che presenta le seguenti uscite colle rispettive frequenze:

uscite	1	2	3	4	5	6
f_i	12	9	7	13	14	5

a_i 10 10 10 10 10 10 ← frequenze attese

$k = 6$, $n = 60$, $v = 6 - 1 = 5$ ← gradi di libertà

dalle tavole, se $\alpha = 5\%$ e $v = 5$, $\chi_c^2 = 11,1$; il chi-quadro vale:

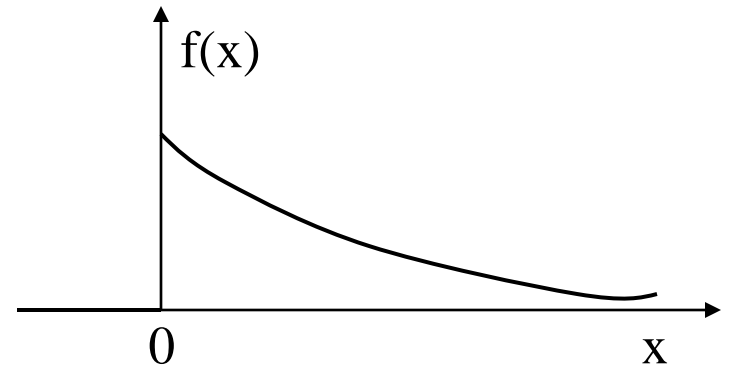
$$\chi^2 = [(12-10)^2 + (9-10)^2 + (7-10)^2 + (13-10)^2 + (14-10)^2 + (5-10)^2] / 10 = 6,4$$

$\chi^2 = 6,4 < 11,1 = \chi_c^2$, dunque si accetta H_0 : il dado non è truccato.

DISTRIBUZIONE ESPONENZIALE O DI POISSON

L'**esponenziale** ha densità di probabilità (**parametro** $k > 0$):

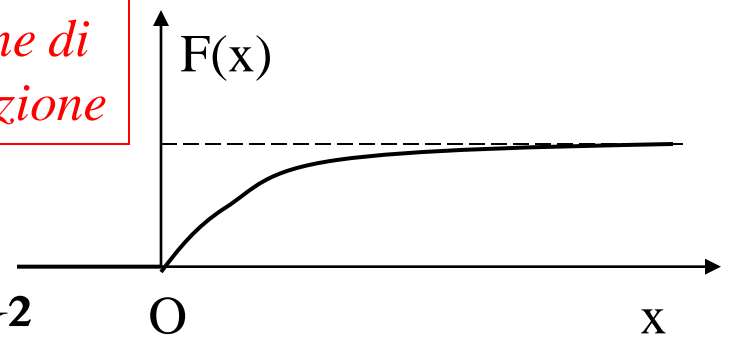
$$f(x) = \begin{cases} ke^{-kx} & , \text{ se } x \geq 0 \\ 0 & , \text{ se } x < 0 \end{cases}$$



Si dimostra che: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } x \leq 0 \\ 1 - e^{-kx} & , \text{ se } x > 0 \end{cases}$$

*funzione di
ripartizione*



Risulta: $M(X) = 1 / k$, $V(X) = 1 / k^2$

DISTRIBUZIONE ESPONENZIALE O DI POISSON esempi

CHIAMATE AL CENTRALINO

X variabile esponenziale di parametro 2 che dà l'intervallo di tempo in minuti tra 2 chiamate consecutive ad un centralino. Calcola la probabilità che passi almeno un minuto tra ciascuna delle prime 3 chiamate.

$$P(X > 1) = \int_1^{+\infty} 2e^{-2x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[-e^{-2x} \right]_1^b = e^{-2} \cong 13,5\%$$

$$P(A) = [P(X > 1)]^3 \cong 0,135^3 \cong 0,246\%$$

DISTRIBUZIONE UNIFORME

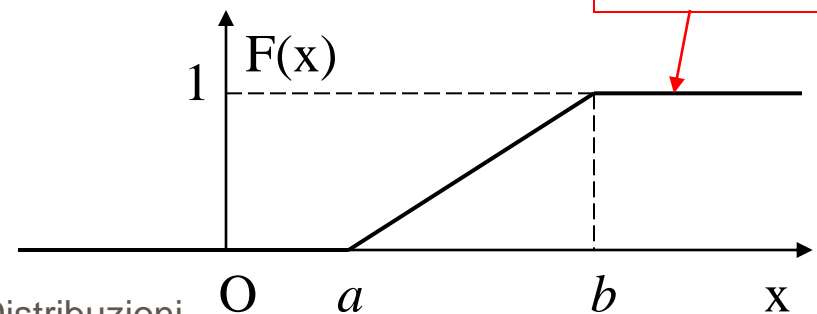
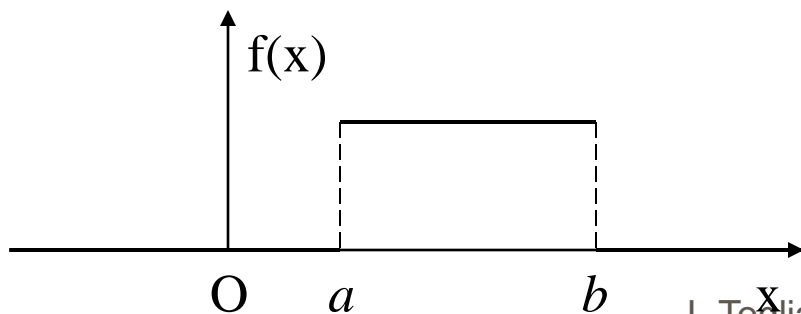
Densità di probabilità della variabile casuale **uniforme** X :

$$f(x) = \begin{cases} 1/(b-a) & , \text{ se } a \leq x \leq b \\ 0 & , \text{ altrove} \end{cases}$$

$a < b$, con a, b **parametri**.

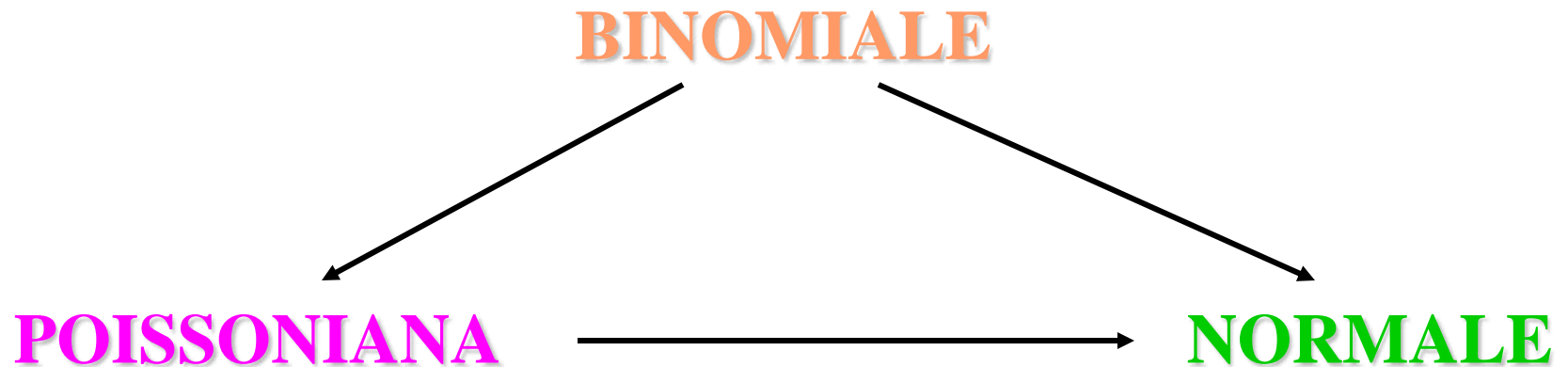
Risulta: $M(X) = (a+b) / 2$, $V(X) = (b-a)^2 / 12$.

funzione di ripartizione



CONVERGENZE TRA DISTRIBUZIONI DI PROBABILITA'

Convergenze tra distribuzioni di probabilità



CONVERGENZE TRA DISTRIBUZIONI DI PROBABILITA'

⌘ La distribuzione **binomiale** di parametri n e p tende alla **poissoniana** di parametro $\lambda = np$ se $n \rightarrow +\infty$.

Dunque:
$$\binom{n}{x} p^x q^{n-x} \approx e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}, \text{ per } n \text{ grande.}$$

L'approssimazione è buona per n grande, p piccolo e np costante e finito; in particolare per: $n > 50$, $p < 0,1$ e $np < 5$.

CONVERGENZE TRA DISTRIBUZIONI DI PROBABILITA'

⌘ *Teorema di De Moivre-Laplace*: La distribuzione della **binomiale** X di parametri n e p tende alla **normale** se $n \rightarrow +\infty$.

Dunque:

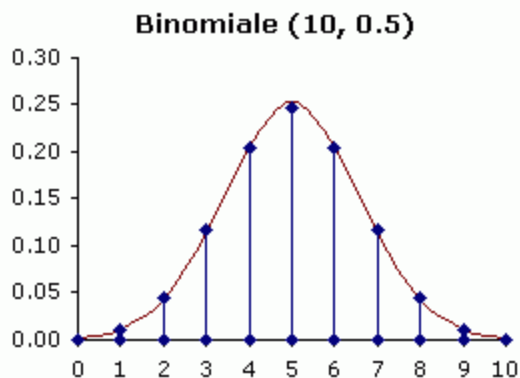
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(a < Z < b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad Z = \frac{X - np}{\sqrt{npq}}$$

essendo Z la standardizzata della binomiale X .

In pratica basta che $np > 5$, $nq > 5$.

esempi di CONVERGENZE TRA DISTRIBUZIONI DI PROBABILITA'

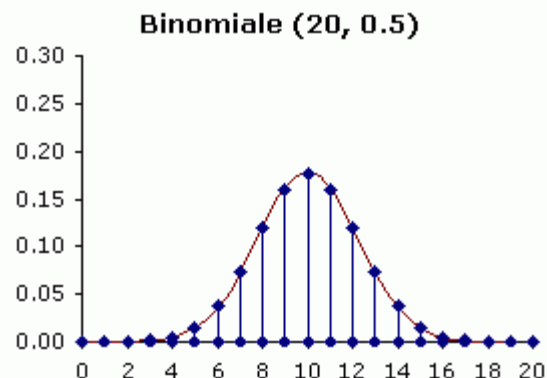
Teorema di De Moivre-Laplace: esempi



Media: $\mu = 10 \times 0.5 = 5$

Deviazione standard:

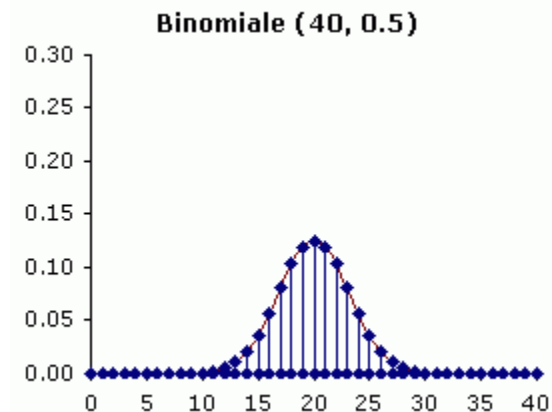
$$\sigma = \sqrt{10 \times 0.5 \times (1 - 0.5)} \approx 1.58$$



Media: $\mu = 20 \times 0.5 = 10$

Deviazione standard:

$$\sigma = \sqrt{20 \times 0.5 \times (1 - 0.5)} \approx 2.24$$



Media: $\mu = 40 \times 0.5 = 20$

Deviazione standard:

$$\sigma = \sqrt{40 \times 0.5 \times (1 - 0.5)} \approx 3.16$$

esempi di CONVERGENZE TRA DISTRIBUZIONI DI PROBABILITA'

RIFIUTARE UN PEZZO

Una ditta produce un lotto di 400 pezzi, con probabilità di rifiuto del 2%. Qual è la probabilità che i pezzi difettosi del lotto siano tra 7 e 10?

$$n = 400, p = 0,02, q = 0,98; m = np = 8, \sigma = (npq)^{1/2} = 2,8.$$

Approssimando la binomiale con la normale:

$$P(7 < X < 10) = P(-0,375 < Z < 0,714) \cong 40,2\%$$

$$\text{c'è chi considera: } P(6,5 < X < 10,5) \cong 51,8\%$$

esempi di CONVERGENZE TRA DISTRIBUZIONI DI PROBABILITA'

TESTA O CROCE

Si lancia 1000 volte una moneta regolare. Qual è la probabilità che testa esca da 520 a 550 volte?

$n = 1000$, $p = 1/2$, $q = 1/2$; $m = np = 500$, $\sigma = (npq)^{1/2} \cong 15,8$.

Approssimando la binomiale con la normale:

$$P(520 < X < 550) = P(1,26491 < Z < 3,16228) \cong 10,2\%$$

c'è chi considera: $P(519,5 < X < 550,5) \cong 10,6\%$

CONVERGENZE TRA DISTRIBUZIONI DI PROBABILITA'

⌘ La distribuzione **poissoniana** di parametro λ tende alla **normale** di parametro se $\lambda \rightarrow +\infty$.

Dunque:

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} P(a < Z < b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad , \quad Z = \frac{X - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$$

essendo Z la standardizzata della poissoniana X .

CONVERGENZE TRA DISTRIBUZIONI DI PROBABILITA'

⌘ *Teorema centrale del limite*: date X_1, X_2, \dots, X_n variabili aleatorie mutuamente indipendenti con uguale speranza m e con uguale varianza σ^2 , la **variabile somma** $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ tende, al crescere di n , alla **normale** con $M(S_n) = nm$, $V(S_n) = n\sigma^2$. Dunque:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(a < Z_n < b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad Z_n = \frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}}$$

essendo Z_n la standardizzata della variabile S_n .

TEOREMA CENTRALE DEL LIMITE

esempio

DAL FORNAIO

E' noto che in un giorno arrivano 120 clienti; ciascuno compra in media 0,7 kg di pane con s.q.m. 0,3 kg. Se all'apertura si dispone di 76 kg, qual è la probabilità di servire tutti i clienti?

L'acquisto di ogni cliente è una v.a. con $m=0,7$ kg , $\sigma=0,3$ kg .
 $n=120$, $M(S_n) = nm = 84$ kg , $\sigma(S_n) = \sigma\sqrt{n} \cong 3,29$ kg , $S_n = 76$ kg .
 $Z \cong (76-84)/3,29 \cong -2,43$. X è la v.a. che dà la quantità del pane necessario. Allora:

$$P(X \leq 76 \text{ kg}) = P(Z \leq -2,43) \cong 0,75\%$$

TEOREMA DI BIENAYME' - CEBICEV

Se X è una variabile casuale con speranza m_X e varianza σ_X^2 , risulta:

$$P(|X - m_X| < k) > 1 - \frac{\sigma_X^2}{k^2}, \quad \forall k \geq \sigma_X$$

$$P(|X - m_X| \geq k) \leq \frac{\sigma_X^2}{k^2}, \quad \forall k > 0$$

N.B. Il teorema di Cebicev non dà il valore della probabilità, ma un intervallo di valori per essa.

TEOREMA DI BERNOULLI

Su n prove ripetute nelle stesse condizioni, detta X la variabile casuale che dà il numero dei successi di un certo evento A che si realizza con probabilità p , si ha:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1, \quad \forall \varepsilon > 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) = 0, \quad \forall \varepsilon > 0$$

N.B. Dunque la frequenza relativa tende alla probabilità, al crescere del numero delle prove.

LEGGE DEI GRANDI NUMERI

Se X_1, X_2, \dots, X_n sono variabili aleatorie indipendenti ugualmente distribuite e con uguale speranza m , detta $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ la variabile somma, risulta:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| < \varepsilon\right) = 1, \quad \forall \varepsilon > 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) = 0, \quad \forall \varepsilon > 0$$

N.B. La variabile 'media' tende alla media (o alla speranza) delle n variabili, al crescere di n .

ESPERIMENTI PROBABILISTICI

STIMARE 'A OCCHIO'

Si presenta agli spettatori una striscia di cartoncino (o altro oggetto adatto): ognuno annota la lunghezza che secondo lui deve avere il cartoncino. Si raccolgono i dati e si analizzano in classi di frequenze, costruendo il relativo istogramma.

Vi è una moda? Che cosa si può dire di media e mediana?

Se vi è una moda, si può identificare attorno ad essa una zona in cui si raccolga circa i $2/3$ dei dati? Si possono 'normalizzare' i dati? Che cosa rispondere a chi chiede qual è la 'vera' lunghezza del cartoncino?



ESPERIMENTI PROBABILISTICI

UN GIOCO PER SIMULARE LA DISTRIBUZIONE DELL'ENERGIA ATOMICA

●	●	●	●	●	●
●	●	●	●	●	●
●	●	●	●	●	●
●	●	●	●	●	●
●	●	●	●	●	●
●	●	●	●	●	●

- Uso di un reticolo di 6 x 6 caselle; ogni casella ha 1 disco.
- Lancio di 2 dadi cubici: le uscite danno le coordinate di 1 casella da cui è tolto il disco (se la casella è vuota ripetere il lancio) che viene messo nella casella avente per coordinate le uscite di un 2° lancio dei dadi.
- Ripetere più volte il doppio lancio dei dadi con relativi spostamenti (es. 100 doppi lanci).
- Alla fine contare quante caselle hanno: 0, 1, 2, ... dischi.

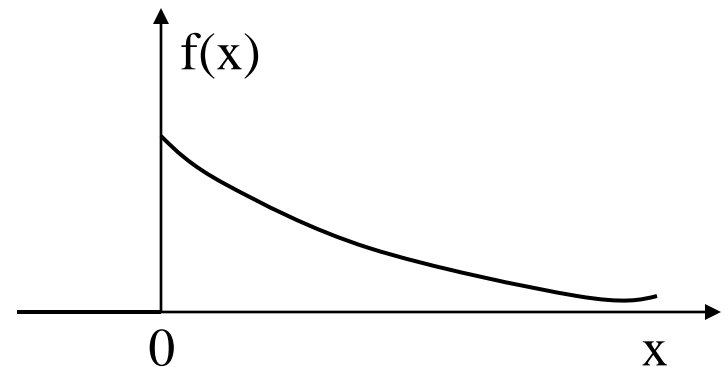
ESPERIMENTI PROBABILISTICI

INTERPRETAZIONE

Il gioco (*Moving quanta at random*, da *Change and chance*, 1975) simula la **distribuzione probabilistica dell'energia** degli atomi.

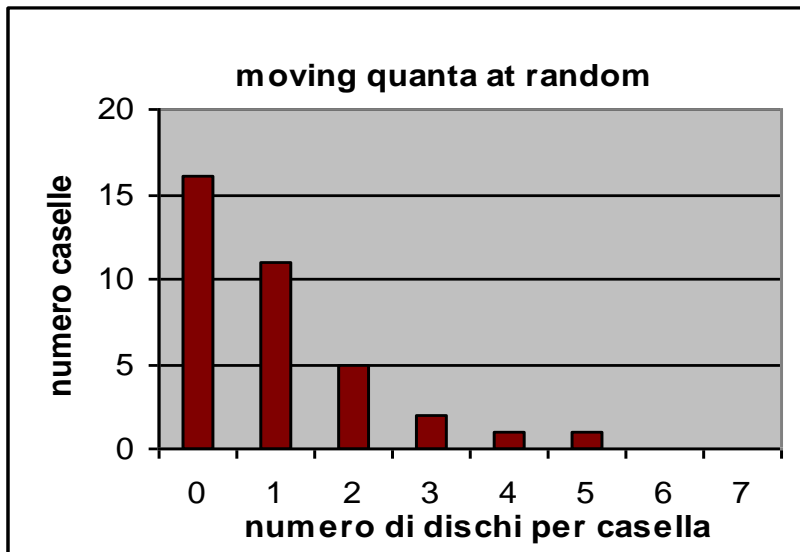
casella \longrightarrow atomo ; 0 dischi \longrightarrow livello fondamentale energia ;
1 disco \longrightarrow 1° livello eccitato ; ecc...

Più grande è il numero dei doppi lanci, più ci si avvicina ad una **distribuzione esponenziale** di probabilità.



ESPERIMENTI PROBABILISTICI

ESECUZIONE CON L'USO DI EXCEL



•Infine si costruisce il diagramma a strisce.



2	0	1	0	1	0
1	1	2	3	0	0
0	0	1	5	1	0
2	0	2	0	0	0
1	3	0	4	0	1
1	2	0	0	1	1

•Si riempie una tabella 6x6 di numeri 1 (1 disco per ogni casella); si fanno vari doppi lanci dei 2 dadi e si aggiorna di volta in volta il numero in ogni casella.

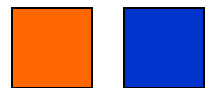
•Si crea una nuova tabella del n° di caselle aventi un fissato numero (0,1,2,3,...): uso di `CONTA.SE(x:y;n)`.

0	1	2	3	4	5	6	7
16	11	5	2	1	1	0	0

ESPERIMENTI PROBABILISTICI


DIFFUSIONE DI UN GAS

- **Esperimento sulla diffusione del bromo**, con raffreddamento ottenuto con ghiaccio secco (IPS).
- **Simulazione con dado icosaedrico e 20 biglietti numerati** disposti inizialmente in uno di due settori disegnati su un foglio. Si lancia il dado: il biglietto uscito cambia settore.
- **Simulazione col doppio imbuto di Orlandini**. I pallini di piombo passano da un imbuto all'altro ad ogni capovolgimento.
- **Simulazione con programmi in Pascal.**



ESPERIMENTI PROBABILISTICI

DECADIMENTO RADIOATTIVO

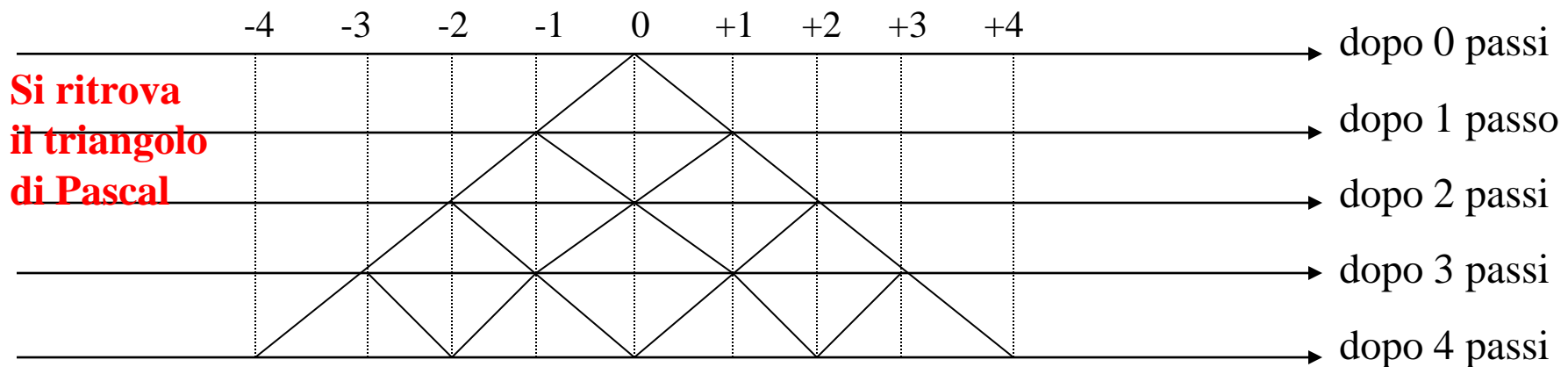
• **Misura della radioattività ambientale (fondo)**. Uso di un contatore di Geiger per registrare il n° degli impulsi al minuto, per la durata di un'ora o più. Dividendo i dati in classi si dovrebbe ottenere una distribuzione di tipo normale. 

• **Simulazione del decadimento radioattivo con 60 dadi cubici (PSSC)**. Si registra il n° di dadi 'decaduti' - presentano la stessa faccia (es. 3) dopo ogni lancio - in funzione del numero di lanci: si dovrebbe ottenere una distribuzione di tipo esponenziale.

APPLICAZIONI INFORMATICHE

RANDOM WALK

Random walk unidimensionale: partendo da 0 c'è probabilità $1/2$ di capitare in $+1$ o in -1 ; da $+1$ c'è probabilità $1/2$ di finire in 0 o in $+2$, da -1 c'è probabilità $1/2$ di finire in 0 o in -2 e così via. La distribuzione di probabilità attorno ad 0 è binomiale (normale).



Si ritrova
il triangolo
di Pascal

Dopo n passi la probabilità di finire in $+n$ (o in $-n$) è $1/2^n$.



APPLICAZIONI INFORMATICHE

USO DI EXCEL

⌘ DISTRIBUZIONE BINOMIALE

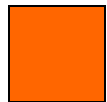
Generare la distribuzione binomiale con $n = 5$ e $p = 0,5$ (es. uscita 'testa' in cinque lanci di una moneta).

In colonna A scrivere i valori di X : 0, 1, 2, 3, 4, 5. In colonna B calcolare le corrispondenti probabilità usando la funzione:

`DISTRIB.BINOM(A2;5;0,5;FALSO)`

fornisce la distribuzione di probabilità;

con 'VERO' la funzione di ripartizione



n

p

APPLICAZIONI INFORMATICHE

⌘ DISTRIBUZIONE DI POISSON

Generare la distribuzione di Poisson con $\lambda = 2,5$.

In colonna A digitare alcuni tra i primi valori di X : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. In colonna B calcolare le corrispondenti probabilità usando la funzione:

`POISSON(A2;2,5;FALSO)`

λ

fornisce la distribuzione di probabilità
con 'VERO' la funzione di ripartizione



APPLICAZIONI INFORMATICHE

⌘ DISTRIBUZIONE NORMALE O GAUSSIANA

Generare la densità di probabilità e la funzione di ripartizione della normale con $m = 100$ e $\sigma = 5$.

In colonna A digitare alcuni valori di X : 80, 84, 88,..., 120.

In colonna B calcolare le relative probabilità con la funzione:

DISTRIB.NORMALE(A2;100;5;FALSO)

densità di
probabilità

m

σ

oppure calcolare i valori della funzione di ripartizione con:

DISTRIB.NORMALE(A2;100;5;VERO)

funzione di
ripartizione

m

σ



APPLICAZIONI INFORMATICHE

⌘ DISTRIBUZIONE CHI-QUADRO

Generare la funzione di ripartizione della distribuzione chi-quadro con $v = 5$ o $v = 10$ (gradi di libertà).

In colonna A digitare alcuni valori di X; ad es.: 0,1,2,...,10.

In colonna B calcolare i relativi valori di α per $v=5$ con la funzione:

DISTRIB.CHI(A2;5)

v 

In colonna C calcolare i relativi valori di $F(x)$ con la funzione:1-B2.

Ripetere il tutto per $v=10$.



APPLICAZIONI INFORMATICHE

⌘ DISTRIBUZIONE ESPONENZIALE

Generare la densità di probabilità e la funzione di ripartizione della distribuzione esponenziale con $\lambda=2$.

In colonna A digitare alcuni valori di X : 0;0,5;1;...;5.

In colonna B calcolare i relativi valori della esponenziale con:

DISTRIB.EXP(A2;2;FALSO)

λ →

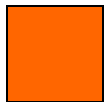
densità di
probabilità

oppure calcolare i valori della funzione di ripartizione con:

DISTRIB.EXP(A2;2;VERO)

λ →

funzione di
ripartizione



APPLICAZIONI INFORMATICHE

⌘ ELABORAZIONI GRAFICHE

Per **variabili casuali discrete** si costruisce il **diagramma a barre** (strisce) della **distribuzione di probabilità**: si selezionano i valori delle probabilità p_x (colonna B), si clicca sull'icona della grafica e si sceglie '**istogramma**' (il 1° va bene); per mettere in ascisse i valori di X si sceglie '**serie**', si pone il cursore su '**etichette asse categorie (X)**', poi si seleziona nella tabella la colonna dei valori di X che vengono automaticamente inseriti in ascisse; si procede normalmente (titoli, legenda,...). Procedimento analogo per la **funzione di ripartizione** se è stata tabulata.

APPLICAZIONI INFORMATICHE

⌘ ELABORAZIONI GRAFICHE

Per **variabili casuali continue** si costruisce il **grafico** della **densità di probabilità**: si selezionano i valori della X e delle relative probabilità $f(x)$ (colonne A e B), si clicca sull'icona della grafica e si sceglie '**dispersione (XY)**' (il 2° o il 3° modo); si procede normalmente (titoli, legenda,...). Può essere utile limitare opportunamente il range dei valori di X .

Stesso procedimento per la **funzione di ripartizione** se è stata tabulata.

APPLICAZIONI INFORMATICHE

APPLET SULLA PROBABILITA'

⌘ http://www.ds.unifi.it/VL/VL_IT/comb/comb1.html

Laboratorio virtuale di probabilità e statistica: si possono trovare simulazioni su prove bernoulliane, lancio di dadi e di monete, tavola di Galton, ago di Buffon, ecc...

⌘ http://cirdis.stat.unipg.it/files/macchina_galton/

simulazione sulla macchina di Galton

ELEMENTI DI STORIA DELLA PROBABILITA'

Georges L. Buffon (1707-1788)

I problemi della moneta e dell'ago sono tra i primi usi della probabilità geometrica e delle distribuzioni continue. In *Essai d'arithmétique morale*, 1777, Buffon studia il problema dell'ago: la probabilità che un ago lungo L intersechi una retta di un fascio di parallele distanti D una dall'altra ad essa contigua è: $2L/(\pi D)$.

Nell'*Essai*, Buffon riporta tabelle su nascite, matrimoni e morti a Parigi nel periodo 1709-1766 con risultati sulla speranza di vita.



ELEMENTI DI STORIA DELLA PROBABILITA'

Pierre Simon Laplace (1749-1827)

Theorie analytique des probabilités (1812): calcolo analogo per

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}. \quad \text{Uso di: } \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \rho e^{-\rho^2} d\rho d\vartheta = \pi$$

$$\text{Ma: } \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 = \pi$$

Studio del problema dell'ago di Buffon.

Essai philosophique des probabilités (1814):

“In fondo la teoria delle probabilità è soltanto senso comune espresso in numeri”.



ELEMENTI DI STORIA DELLA PROBABILITA'

Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

Rilevazione geodesica su grande scala dello stato di Hannover (1818) - curva normale per descrivere la misura degli errori (*Disquisitiones generales circa superficies curvas*, 1827); uso della normale per studiare gli errori nelle osservazioni astronomiche.



ELEMENTI DI STORIA DELLA PROBABILITA'

Simeon-Denis Poisson (1781-1840)

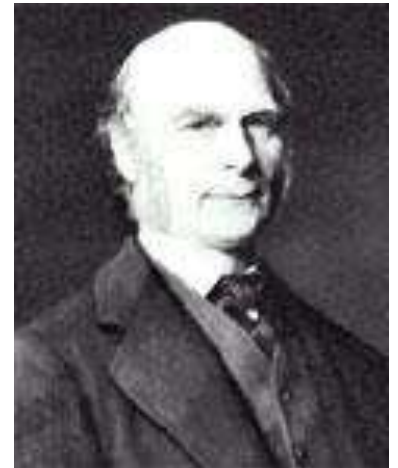
*Recherches sur la probabilité des jugements en
matière criminelle et en matière civile* (1837):

distribuzione di Poisson.



Francis Galton (1822-1911)

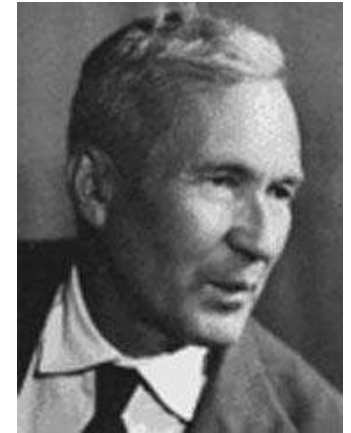
Teoremi di convergenza alla normale; quincunx
(*Natural Inheritance*, 1889)



ELEMENTI DI STORIA DELLA PROBABILITA'

Andrej N. Kolmogorov (1903-1987)

Concetti fondamentali nel calcolo delle probabilità (1933): assiomatizzazione.



Bruno de Finetti (1906-1985)

Rappresentante della scuola soggettivista (“*La probabilità non esiste*”). *Probabilismo, saggio critico sulla teoria delle probabilità e sul valore della scienza* (1930): per la prima volta le sue vedute soggettiviste sul calcolo delle probabilità.



Bruno de Finetti 1906-1985

ELEMENTI DI STORIA DELLA PROBABILITA'

Soggettivismo: realistico correttivo di un'arbitraria convinzione sulla pretesa “oggettività” della scienza, secondo la quale essa sarebbe un attributo intrinseco alle cose, mentre altro non è che la condivisione, fra più esseri razionali, delle stesse informazioni, la coincidenza di soggettività, ossia una “intersoggettività”.

“La formulazione di una teoria, di una legge, è un anello del processo mentale per cui passiamo dall'osservazione di fatti passati alla previsione di fatti futuri. In definitiva è solo dei fatti, dei singoli fatti, che ha senso parlare. E' ai fatti, che (se sono futuri, e se comunque ne ignoriamo l'esito) possiamo attribuire una probabilità”.

(De Finetti) 

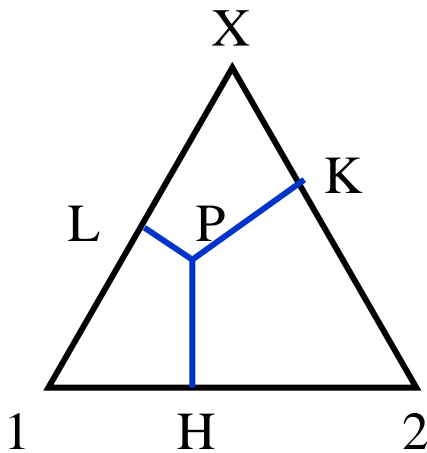
ELEMENTI DI STORIA DELLA PROBABILITA'

Interventi di de Finetti per il rinnovo della didattica

- ⌘ Nuovi programmi d'insegnamento (Frascati, anni '60)
- ⌘ Sul “*Periodico di Matematiche*” 1965-74: programmi e criteri per l'insegnamento della matematica, il ‘morbo della trinomite’, proposte per la matematica nei nuovi licei, contro la matematica per deficienti...
- ⌘ **Fusionismo**: “... *fusione di geometria da una parte e di aritmetica, analisi ecc, dall'altra; più in generale, si tratta di fondere in modo unitario tutto ciò che si studia (anche interdisciplinariamente, tra matematica e altre scienze...)*” (De Finetti) →

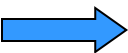
ELEMENTI DI STORIA DELLA PROBABILITA'

Esempio di fusionismo: pronostici per una partita di calcio



Nel triangolo equilatero $12X$: $PH+PK+PL = h$ (altezza). Se $h=1$, $PH=p_X$, $PK=p_1$, $PL=p_2$ allora $p_X + p_1 + p_2 = 1$, con $p_X, p_1, p_2 \in [0,1]$

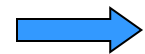
Quindi ogni punto P del triangolo rappresenta un pronostico per una partita: se $P \equiv 1$ allora il risultato 1 è certo, 2 e X sono impossibili.

La vicinanza di P a un lato o a un vertice indica se un pronostico è ritenuto più probabile di un altro. (De Finetti, 1967) 

ELEMENTI DI STORIA DELLA PROBABILITA'

*“Per l’insegnamento occorre tener ben presente che la prospettiva dei **destinatari** è quella di **potenziali consumatori di matematica**, che dovremmo persuadere della possibilità e convenienza di **farne uso nei loro problemi quotidiani** anziché ignorarla e ragionare coi piedi.”*

*“...rivalutare gli **aspetti più attivi, più creativi** (ma anche, e proprio per ciò, più avventurosi, fantasiosi, soggettivi) del nostro modo di pensare. Il rigido e impeccabile ragionamento deduttivo non può condurre a nessuna conclusione nuova, cioè non già implicitamente contenuta nelle premesse.”* (De Finetti)



ELEMENTI DI STORIA DELLA PROBABILITA'

“Un insegnamento basato sulla presentazione di problemi concreti, e più diversi fra loro, in modo da far librare il discente dal concreto all’astratto nel modo più naturale e “storicamente” vero. Anche ai fini di una più intuitiva comprensione, era da lui ben accettato il sacrificio di una parte del famigerato rigore matematico, al quale si dovrebbe arrivare soltanto dopo una già sicura acquisizione dei concetti...La cosiddetta ‘**matematica da fisico**’, come viene spesso indicata la matematica nella forma più concettuale in cui normalmente è utilizzata dai fisici, non solo non scandalizzava de Finetti, ma anzi lo trovava pienamente d’accordo”.

BIBLIOGRAFIA

LIBRI

- [1] Prodi G., "Matematica come scoperta", voll.1 e 2, D'Anna, FI, 1983
- [2] Di Bacco-Lombardo, "Fatti e congetture", La Nuova Italia, FI, 1990
- [3] Zwirner-Scaglianti, "Pensare la Matematica", voll. 2 e 3, CEDAM, PD, 1993
- [4] De Finetti B., "Il saper vedere in Matematica", Loescher, TO, 1967
- [5] Paulos J. A., "Gli snumerati", Leonardo, MI, 1990
- [6] Falletta N., "Il libro dei paradossi", TEA, 2002
- [7] Gardner M., "Enigmi e giochi matematici", BUR, 1998
- [8] Maraschini-Palma, "Format, SPE", vol.2, Paravia, TO, 1996
- [9] Lombardo Radice-Mancini Proia, "Il metodo matematico", Principato, MI, 1977
- [10] Nuffield, "Change and chance", unit 9, Longman, London, 1975

BIBLIOGRAFIA

- [11] Cerasoli A.-M., "Calcolo delle probabilità", Zanichelli, BO, 1987
- [12] De Finetti B., "Teoria delle probabilità", Einaudi, TO, 1970
- [13] Monti-Pierobon, "Teoria della probabilità", Zanichelli, BO, 2000
- [14] Scozzafava R., "Primi passi in probabilità...", Zanichelli, BO, 1996
- [15] Lipschultz, "Calcolo delle probabilità", Schaum's, McGraw-Hill, MI, 1994
- [16] Tibone F.-Pezzi G., "La Fisica secondo il PSSC", Zanichelli, BO, 2005
- [17] Boyer C., "Storia della Matematica", Mondadori, MI, 1998
- [18] Bellodi-Francesio-Pezzi-Puviani, "Linguaggio Pascal", Zanichelli, BO, 1990

BIBLIOGRAFIA

ARTICOLI DA RIVISTE

Schneider I., "Why do we find the origin of a calculus of probabilities in the 17th century?", D. Reidel Publishing Company, 1980

Kendall M., "Le origini del calcolo delle probabilità", Induzioni, 2/2001

Maturo A., "Sull'assiomatica di B. de Finetti...", Per. di Matematiche, 1/2003

Mortola S., "Dimostrazioni che lasciano senza parole", Archimede, 2/2006

De Finetti B., "Contro la matematica per deficienti", Per. Matematiche, 2/2006

SITI INTERNET

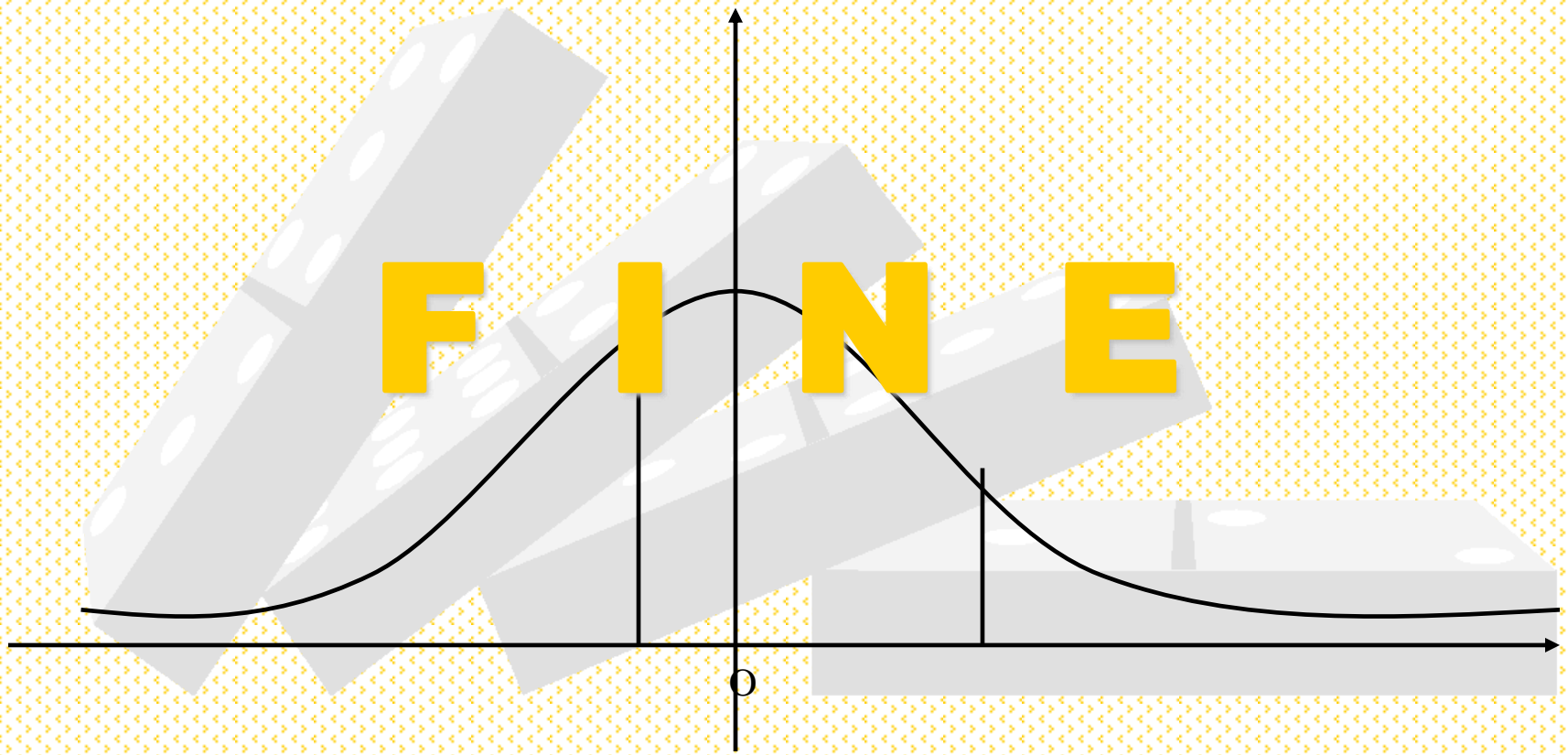
http://www.ds.unifi.it/VL/VL_IT/comb/comb1.html

http://cirdis.stat.unipg.it/files/macchina_galton/protagonisti/galton.htm

<http://www2.dm.unito.it/paginepersonali/garello/chiquadro.pdf>

www.cut-the-knot.org/ctk/August2001.shtml

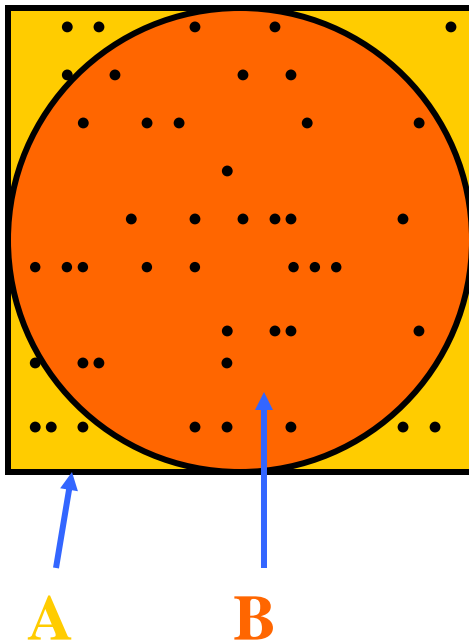
DISTRIBUZIONI DI PROBABILITÀ



PROBABILITA' GEOMETRICA

esempi

Qual è la probabilità che un tiratore centri la zona **B** supponendo che comunque centri la zona **A**?



$$P(E) = \frac{\pi r^2}{4r^2} = \frac{\pi}{4} \cong 0,785$$

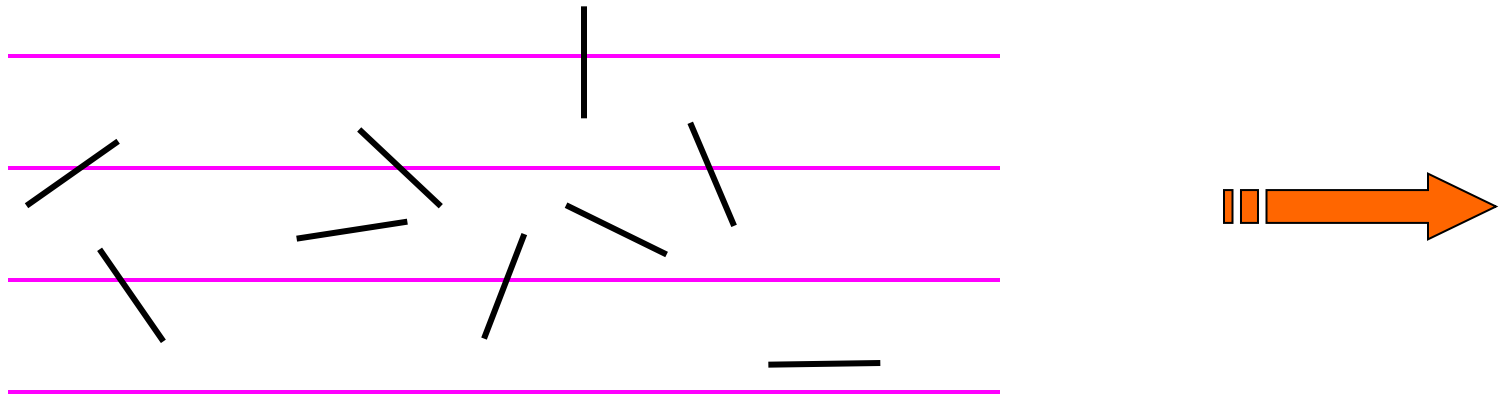
Metodo Monte Carlo Si considerano punti casuali in A: alcuni saranno anche in B.

$$P(E) = \frac{n^\circ \text{ punti in } B}{n^\circ \text{ punti in } A} = \frac{35}{45} \cong 0,778$$

GIOCHI E PARADOSSI PROBABILISTICI

L'AGO DI BUFFON

Qual è la probabilità che un ago lungo L intersechi una retta di un insieme di parallele distanti L l'una dall'altra consecutiva?

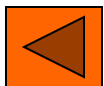


GIOCHI E PARADOSSI PROBABILISTICI

$P(A) = 2 / \pi \cong 63,66\%$. La **dimostrazione** di **G. Rota** (1997):

- a) prendo un curva piana c qualsiasi, lunga L ;
- b) calcolo il valor medio m del n° d'intersezioni di c con le rette;
- c) m non dipende dalla forma di c ma solo dalla sua lunghezza L ;
- d) m è proporzionale a L ;
- e) se c è la circonferenza di diametro L , $m = 2 = k L = k \pi L$,
quindi $k = 2 / (\pi L)$;
- f) per l'ago lungo L , sarà: $m = k L = 2 L / (\pi L) = 2 / \pi$;
- g) $m = P(A) \cdot 1 + (1 - P(A)) \cdot 0 = P(A)$

Simulazione in: www.cut-the-knot.org/ctk/August2001.shtml



ESPERIMENTI PROBABILISTICI



ESPERIMENTO DELL'AGO DI BUFFON

Preparare un foglio rigato con rette distanti quanto la lunghezza di un ago. Lanciare più volte un gruppo (es. 3) di aghi uguali e annotare quanti intersecano le righe della griglia. Qual è la frequenza con cui un ago interseca la griglia?

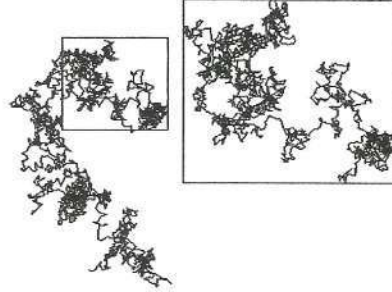
Si può rifare l'esperienza usando, al posto dell'ago, una moneta avente il perimetro lungo quanto l'ago.

Il moto browniano

Nel 1828 il botanico scozzese Robert Brown osserva al microscopio il moto disordinato dei granuli di polline in una goccia di rugiada.

Suo grande merito è quello di aver fatto uscire il fenomeno da un ambito puramente biologico per introdurlo nel campo della fisica, come caratteristico di particelle solute o sospese in un fluido.

Che cosa vide Brown?



La fisica del moto browniano

Con linguaggio odierno si può spiegare così: le molecole della soluzione urtano casualmente tra loro come in un gas. Per il principio di equipartizione ogni particella ha la stessa energia cinetica media, ma poiché la massa della particella di soluto è molto maggiore, la sua velocità è molto minore e può essere seguita al microscopio.

Come si arriva a questa spiegazione?

- Einstein pubblica l'11 maggio 1905 un articolo. In questo lavoro si mostrerà che corpi di dimensioni visibili al microscopio sospesi in un liquido eseguiranno movimenti facilmente osservabili compatibili con la teoria cinetica del calore. E' possibile che essi siano identici ai cosiddetti "moti Browniani"; tuttavia mi mancano informazioni precise a riguardo.

Qual era lo scopo principale di Einstein?

"Se ci sarà una verifica sperimentale allora la termodinamica classica non potrà più essere considerata applicabile con precisione a corpi microscopici: diverrà possibile determinare le vere dimensioni degli atomi."

LA DEFINITIVA AFFERMAZIONE DELLA
TEORIA
CORPUSCOLARE DELLA MATERIA

Di conseguenza furono possibili alcune misure di

costanti fondamentali

N_A, k

e di parametri come

r molecole, η liquidi

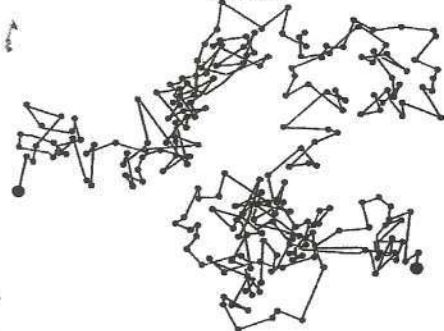
Su quali basi lavora di Einstein?

- studio sul moto casuale /random walk (Bachelier 1900) ***
- Termodinamica statistica (Maxwell e Boltzmann)
- Studi sui fluidi viscosi (Stokes)
- Applicazione delle leggi dei gas perfetti alla pressione osmotica (Van't Hoff)

Che cosa succede dopo?

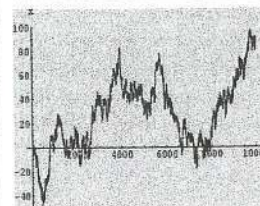
- nel 1908 Einstein pubblica una versione della sua teoria sul moto browniano semplificata ad uso dei chimici *
- Perrin 1908(Nobel 1926) esegue le verifiche sperimentali **
- Langevin, Smoluchowsky elaborano altre eleganti versioni teoriche (equazioni differenziali, teorema del viriale)
- Sul moto browniano si fanno altre osservazioni.

Ad esempio, la traiettoria di un moto browniano è un **frattale**: un suo frammento ha le stesse proprietà statistiche dell'intera traiettoria

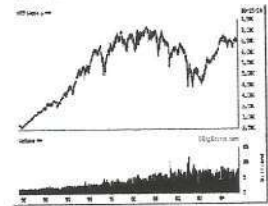


L'analogia fisica e finanza

Posizione particella browniana



Andamento indice finanziario



Teoria elementare del moto browniano (Einstein, 1908)

traduzione Stefanini per corso AIF 1979

Un cilindro orizzontale contenente una soluzione diluita è diviso in due parti da un pistone semipermeabile (lascia passare solo il solvente).

Sollecitato dalla differenza tra le pressioni osmotiche, si instaura un processo di diffusione che porta, all'equilibrio, all'uguaglianza tra le concentrazioni.

La forza rapportata al volume rapportata al numero di particelle di soluto vale

$$\frac{F}{VN} = \frac{\Delta p \cdot A}{\Delta x \cdot A \cdot N} = \frac{\Delta p}{N \cdot \Delta x}$$

- Poiché la pressione osmotica, cioè la differenza di pressione dovuta alla presenza del soluto segue le leggi dei gas perfetti

$$P = \frac{nRT}{V} = vRT$$

$$\frac{F}{NV} = \frac{\Delta p}{nN_A \Delta x} = \frac{kT \Delta v}{n \Delta x}$$

Secondo quanto determinato da Stokes per dimensioni macroscopiche, la forza d'attrito su un oggetto sferico che si muove in un fluido è proporzionale alla velocità e al raggio dell'oggetto, alla viscosità del fluido, con un fattore di forma 6π .

$$F_u = 6\pi\eta r v$$

Poiché però le particelle di soluto sono N , la forza totale è il prodotto

$$F = N F_u$$

Quindi sostituendo nelle equazioni precedenti

$$\frac{F}{VN} = \frac{6\pi r \eta v N}{VN} = kT \frac{\Delta v}{n \Delta x}$$

$$\frac{v n N}{VN} = v v = \frac{kT}{6\pi \eta r} \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

Il prodotto $v v$ rappresenta il numero di particelle di soluto che attraversa l'unità di superficie del pistone nell'unità di tempo.

Come altre grandezze formalmente analoghe è detta

densità di corrente di diffusione

$$j = v v$$

chiamando quindi coefficiente di diffusione D la costante di proporzionalità

$$J = D \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

$$D = \frac{kT}{6\pi\eta r}$$

Le molecole di soluto, durante la loro diffusione lungo l'asse x , si muovono con un moto casuale e dopo un tempo t si sono spostate di un valore s , che si può ipotizzare uguale per tutte in valore assoluto ma indifferentemente di segno positivo o negativo. Supponendo il pistone di spessore trascurabile, lo attraverseranno da destra a sinistra la metà delle molecole che si trovano ad una distanza minore o uguale di s .

Usando la simbologia e calcolando la differenza tra le diffusioni nei due versi

$$j_d = \frac{1}{2} v_d \frac{s}{t} \quad j_s = \frac{1}{2} v_s \frac{s}{t}$$

$$j = \frac{1}{2} (v_d - v_s) \frac{s}{t}$$

Ipotizzando un andamento costante nella variazione della concentrazione sarà

$$\frac{v_d - v_s}{s} = \frac{\Delta v}{\Delta x} \quad v_d - v_s = s \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

$$j = \frac{1}{2} s \frac{\Delta v}{\Delta x} \frac{s}{t} = \frac{1}{2} \frac{s^2}{t} \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

Quindi eguagliando le due definizioni di j

$$j = D \frac{\Delta v}{\Delta x} \quad j = \frac{1}{2} \frac{s}{t} \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

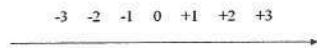
$$s = \sqrt{2D} \sqrt{t}$$

Infine la relazione che cercavamo compatibile con gli studi sul...

$$s = \sqrt{\frac{2kT}{6\pi\eta}} \sqrt{t}$$

Studio di un moto casuale

Consideriamo un reticolo unidimensionale i cui nodi sono etichettati da un numero relativo progressivo



Supponiamo che all'istante iniziale ($t = 0$)

la particella si trovi in $x = 0$.

Con una scelta casuale equiprobabile

all'istante $t = 1$ potrà trovarsi in

$x = +1$ o in $x = -1$ e così via.

Abbiamo quindi una variabile aleatoria

$z = \pm 1$, non predittibile e a valor medio

$$\langle z \rangle = 0$$

Al passo ennesimo sarà

$$x_{n+1} = x_n + z$$

$$(x_{n+1})^2 = x_n^2 + 2x_n z + z^2$$

$$z^2 = 1 \quad \text{e mediando}$$

$$\overline{x_{n+1}^2} = \overline{x_n^2} + 2\overline{x_n z} + 1$$

$$\overline{x_{n+1}^2} = \overline{x_n^2} + 1$$

$$\overline{x_1^2} = 1$$

$$\overline{x_2^2} = 2$$

$$\overline{x_n^2} = n$$

$$\sqrt{\overline{x_n^2}} = \sqrt{n}$$

ma n è proporzionale al tempo t
quindi d è proporzionale alla radice quadrata del tempo
trascorso

$$n = kt$$

$$s = \sqrt{\overline{x_n^2}} = \sqrt{kt} = \sqrt{k} \sqrt{t}$$

Rifacciamo l'esperimento di Perrin

**

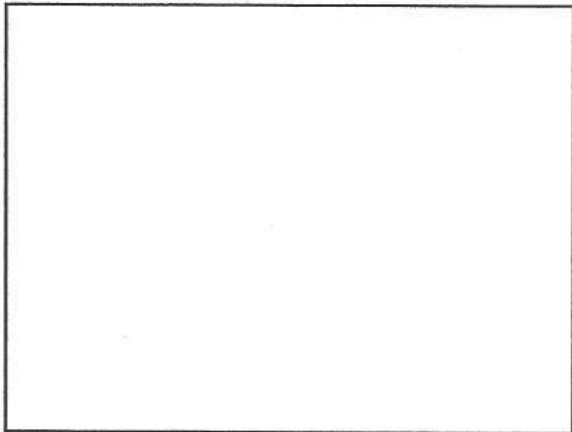
- Nel 1908 il fisico francese Perrin verifica sperimentalmente la previsione teorica di Einstein collegando una cinepresa al microscopio e prendendo misure sui fotogrammi.
Perrin usa la radice di gommagutta (garnicia hamburyi hook) una farina che diluita in alcool si rivela composta da granuli regolari con diametro di circa $1 \mu\text{m}$

Che cosa Serve?

Microscopio ottico con almeno 400 ingrandimenti
Vetrini e coprioggetto
Una goccia di latte e qualche goccia d'acqua
Una videocamera USB per filmare e proiettare
seguire il moto di una particella in acqua e verificare sperimentalmente la formula

Che cosa si fa?

- Si posiziona il proiettore e si proietta il filmato
- Si sceglie una particella e la si segue (un punto ogni 15 secondi) e si ricavano almeno 31 posizioni (30 spostamenti)
- Il foglio EXCEL fornito provvede a tutti questi calcoli



Si individua la direzione della deriva congiungendo il primo e l'ultimo dato

Si misurano le posizioni rispetto a questo asse

Si calcolano gli spostamenti a partire dalle posizioni appena misurate

$$s_{1,15} = p_2 - p_1$$

Ora si possono calcolare gli spostamenti per multipli di 15 secondi sommando gli spostamenti ottenuti per 15 secondi.

$$S_{1,30} = p_3 - p_1$$

Ora è possibile calcolare gli spostamenti quadratici medi relativi ad intervalli

$$\text{di } 15, 30, 45, 60 \text{ e } 75 \text{ secondi} \quad d = \sqrt{k} \sqrt{t}$$

Si traccia poi il grafico della retta
il coefficiente angolare si può determinare usando EXCEL

Questo metodo previsto in un primo momento è stato sostituito durante la lezione del 13/3/2007 da un altro che utilizza un software particolare, a cura del prof. Quaini.

BIBLIOGRAFIA

- A. Einstein "Teoria elementare del moto browniano" traduzione di L. Stefanini, La Fisica Nella Scuola 1979
- C. Romagnino, L. Loy "Lo studio del moto browniano: un esame della prima teoria di Einstein sull'argomento" La Fisica Nella Scuola 1988
- <http://fiscavolta.unipv.it/didattica/energia/AppletGonzalo/motobrow.htm>
- http://www.lfns.it/idro/2006/M_Testa.html
- <http://www.to.infn.it/giozzi/SIS/lecture.pdf>

CORSO I.T.I.S. 2006 - 2007

**DISTRIBUZIONI
POISSONIANE**

GENERATORE DI EVENTI CASUALI
BASATO SUL RUMORE

27 / 2 / 2007 1
Corso I.T.I.S. 2006 - 2007 -
Probabilità e Fisica

Rumore

Il termine **rumore** in acustica viene applicato per denominare una qualsiasi variabile fisica che fluttui nel tempo in maniera irregolare, imprevedibile.

27 / 2 / 2007 2
Corso I.T.I.S. 2006 - 2007 -
Probabilità e Fisica

Rumore

In elettronica si distingue tra rumore e disturbo.

- Il rumore solitamente è un segnale di origine interna
- Il disturbo è un segnale che proviene dall'esterno

27 / 2 / 2007 3
Corso I.T.I.S. 2006 - 2007 -
Probabilità e Fisica

Rumore

In generale il rumore consiste di "fluttuazioni" dovute a proprietà fondamentali della materia e in quanto tali di origine interna e non eliminabili.

27 / 2 / 2007 4
Corso I.T.I.S. 2006 - 2007 -
Probabilità e Fisica

Rumore

Queste fluttuazioni che si osservano a livello macroscopico derivano da fluttuazioni a livello microscopico. Si manifestano nella forma di segnali casuali il cui andamento nel tempo non è descrivibile analiticamente, ma è descrivibile solo in termini statistici.

27 / 2 / 2007 5
Corso I.T.I.S. 2006 - 2007 -
Probabilità e Fisica

Rumore

Il rumore è interessante per due motivi:

- 1) limita la precisione delle misure fisiche più sensibili
- 2) può dare informazioni su quantità globali del sistema

27 / 2 / 2007 6
Corso I.T.I.S. 2006 - 2007 -
Probabilità e Fisica

Rumore

Sorgenti di rumore nei componenti elettronici

- Shot noise e rumore di generazione - ricombinazione
- Rumore termico o rumore Johnson
- Rumore 1/f (flicker, pink noise)
-

27 / 2 / 2007 7

Corso I.T.I.S. 2006 - 2007 -
Probabilità e Fisica

Shot noise

Questo processo di rumore è legato alla granulosità dei portatori di carica.

Il flusso di elettroni è accompagnato da fluttuazioni simili a quelle che si sentono quando la pioggia cade su un tetto (shot noise)

27 / 2 / 2007 8

Corso I.T.I.S. 2006 - 2007 -
Probabilità e Fisica

Shot noise

Si ha shot noise in un circuito tutte le volte che non ci sono correlazioni preordinate nel flusso di elettroni.

27 / 2 / 2007 9

Corso I.T.I.S. 2006 - 2007 -
Probabilità e Fisica

Shot noise

Ad esempio si avrà shot noise nel passaggio di corrente in un tubo a vuoto, o, più in generale, nel passaggio di carica attraverso una barriera di qualche genere.

Questo effetto è indipendente dalla temperatura.

27 / 2 / 2007 10

Corso I.T.I.S. 2006 - 2007 -
Probabilità e Fisica

Rumore termico o rumore Johnson

Il rumore termico è causato dal moto termico casuale dei portatori di carica nel conduttore e dipende dalla temperatura assoluta T.

È la sorgente di rumore più comune negli apparati e dispositivi elettronici esso è infatti intrinseco di ogni elemento dissipativo (es. resistori) che si trovi ad una temperatura diversa dallo zero assoluto.

27 / 2 / 2007 11

Corso I.T.I.S. 2006 - 2007 -
Probabilità e Fisica

Rumore termico o rumore Johnson

In un conduttore gli elettroni, a causa della temperatura, non possiedono tutti la stessa energia. Le lievi fluttuazioni d'energia attorno ai valori definiti dalla curva di distribuzione più probabile sono molto piccole, ma sono sufficienti a provocare entro il conduttore piccole tensioni di rumore.

27 / 2 / 2007 12

Corso I.T.I.S. 2006 - 2007 -
Probabilità e Fisica

Rumore termico o rumore Johnson

Anche fluttuazioni statistiche nella generazione termica di coppie termiche elettrone - lacuna e il loro moto casuale termico generano un rumore Johnson.

27 / 2 / 2007

Corso I.T.I.S. 2006 - 2007 -
Probabilità e Fisica

13

Rumore termico o rumore Johnson

Il valore quadratico medio (quadrato del valore efficace) della tensione di rumore V_N di un resistore a una certa temperatura entro un intervallo di frequenze $(f_{H1} - f_{L1})$ è dato da:

$$V_N^2 = 4 \cdot k \cdot T \cdot R \cdot B$$

dove:

k = costante di Boltzmann, J / K

T = temperatura del resistore, K

R = resistenza, Ω

$B = (f_{H1} - f_{L1})$ = larghezza della banda, Hz

27 / 2 / 2007

Corso I.T.I.S. 2006 - 2007 -
Probabilità e Fisica

14

Rumore 1/f (flicker, pink noise)

L'origine del rumore ($1 / f$) non è chiara come nei casi termico e shot. Le caratteristiche vengono stabilite empiricamente. Come dice il nome lo spettro è inversamente proporzionale alla frequenza, ed è rilevante solo per frequenze inferiori a 100 Hz. Per le applicazioni a frequenza maggiore è normalmente trascurabile.

27 / 2 / 2007

Corso I.T.I.S. 2006 - 2007 -
Probabilità e Fisica

15

Rumore bianco

Il **rumore bianco** è un particolare tipo di rumore caratterizzato dall'assenza di periodicità e da ampiezza costante su tutto lo spettro di frequenze.

27 / 2 / 2007

Corso I.T.I.S. 2006 - 2007 -
Probabilità e Fisica

16

Rumore bianco

Il rumore bianco presenta uno spettro "piatto" su tutto l'intervallo di lunghezze d'onda considerato



27 / 2 / 2007

Corso I.T.I.S. 2006 - 2007 -
Probabilità e Fisica

17

Rumore bianco

È chiamato *bianco* per analogia con il fatto che una radiazione elettromagnetica all'interno delle bande della luce visibile di spettro simile apparirebbe all'occhio umano come luce bianca.

27 / 2 / 2007

Corso I.T.I.S. 2006 - 2007 -
Probabilità e Fisica

18

Rumore bianco

Nella pratica però il rumore bianco non esiste, perché nessun sistema è in grado di generare uno spettro uniforme per tutte le frequenze da zero a infinito, e il rumore bianco è generalmente riferito ad un intervallo di frequenze.

27 / 2 / 2007

Corso I.T.I.S. 2006 - 2007 -
Probabilità e Fisica

19

Rumore bianco

Dal punto di vista statistico, il rumore bianco è caratterizzato dall'aver valori istantanei del tutto privi di correlazione.

Se si campiona un segnale di questo tipo, ciascun valore appare completamente imprevedibile rispetto ai precedenti.

27 / 2 / 2007

Corso I.T.I.S. 2006 - 2007 -
Probabilità e Fisica

20

Rumore bianco

Buone approssimazioni di rumore bianco sono prodotte da diversi fenomeni naturali di tipo caotico, come il moto Browniano.

È proprio l'agitazione termica casuale di particelle cariche all'interno di conduttori e semiconduttori che genera il rumore bianco elettrico nei dispositivi elettronici.

27 / 2 / 2007

Corso I.T.I.S. 2006 - 2007 -
Probabilità e Fisica

21

Rumore bianco

Campionando un rumore bianco prodotto per esempio da un transistor si ottiene una sequenza di numeri aleatori.

Questo principio è impiegato in alcuni generatori di numeri casuali.

27 / 2 / 2007

Corso I.T.I.S. 2006 - 2007 -
Probabilità e Fisica

22

Rumore in un transistor

In un transistor, oltre al rumore termico, si ha un rumore dovuto al moto casuale dei portatori che attraversano le giunzioni dell'emettitore e del collettore e alla ricombinazione casuale delle lacune e degli elettroni entro la base. Inoltre si ha un effetto di partizione dovuto alla variazione casuale con cui la corrente si suddivide tra il collettore e la base.

27 / 2 / 2007

Corso I.T.I.S. 2006 - 2007 -
Probabilità e Fisica

23

Rumore in un transistor

Si è trovato che **un transistor non genera un rumore bianco, eccetto che nella regione di centro banda**. Inoltre la quantità di rumore generato dipende dalle condizioni di polarizzazione e dalla resistenza del generatore.

27 / 2 / 2007

Corso I.T.I.S. 2006 - 2007 -
Probabilità e Fisica

24

Rumore in un transistoro

Quindi, quando si vuole specificare il rumore di un transistoro occorre fornire la frequenza centrale, il punto di riposo e il valore della resistenza del generatore, R_S .

27 / 2 / 2007

Corso I.T.I.S. 2006 - 2007 -
Probabilità e Fisica

25

NF Cifra di rumore

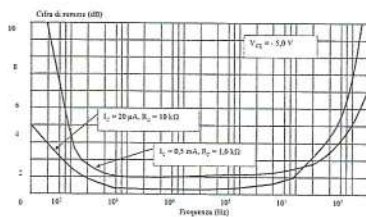
È il rapporto tra la potenza di rumore all'uscita del circuito in esame e la potenza d'uscita di rumore che si sarebbe ottenuta nella stessa banda se l'unica fonte di rumore fosse stato il rumore termico nella resistenza interna R_S del generatore di segnale.

27 / 2 / 2007

Corso I.T.I.S. 2006 - 2007 -
Probabilità e Fisica

26

Rumore in un transistoro



Si possono individuare tre zone distinte.

27 / 2 / 2007

Corso I.T.I.S. 2006 - 2007 -
Probabilità e Fisica

27

Distribuzione di Poisson

Vi sono fenomeni in cui determinati eventi, con riferimento ad un particolare spazio o periodo di tempo, accadono raramente: il numero di eventi che si verifica in quel periodo o in quello spazio è aleatorio e varia da 0 a un numero x , il cui valore non è determinabile a priori.

Tali eventi sono ben descritti dalla distribuzione di Poisson

27 / 2 / 2007

Corso I.T.I.S. 2006 - 2007 -
Probabilità e Fisica

28

Distribuzione di Poisson

La poissoniana è anche detta legge degli eventi rari, in quanto può essere applicata al posto della variabile casuale binomiale $B(n; p)$ quando la probabilità p di un evento è molto bassa e contemporaneamente la grandezza del campione n è molto alta, ovvero quando un evento è raro, ma il numero di eventi che si verificano ($\lambda = n \cdot p$) è comunque finito.

27 / 2 / 2007

Corso I.T.I.S. 2006 - 2007 -
Probabilità e Fisica

29

Distribuzione di Poisson

La distribuzione di probabilità di eventi rari può essere ricavata a partire dalle seguenti semplici condizioni:

- gli eventi devono essere indipendenti: il verificarsi di uno o più eventi in un certo intervallo di tempo Δt , non dipende dal verificarsi di uno o più eventi nell'intervallo di tempo Δt , per qualsiasi valore di i e di j ;
- la probabilità di avere un evento nell'intervallo di tempo Δt è proporzionale alla durata dell'intervallo stesso: $p = \lambda \cdot \Delta t$;
- la probabilità che nello stesso intervallo Δt si verificano due ripetizioni è molto piccola in confronto con la probabilità di una sola occorrenza.

27 / 2 / 2007

Corso I.T.I.S. 2006 - 2007 -
Probabilità e Fisica

30

Distribuzione di Poisson

La distribuzione di probabilità per una variabile di Poisson x è data da:

$$p(x) = \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!} \quad \text{con } x = 0, 1, 2, \dots, n$$

dove:

- λ è un qualsiasi valore positivo ($\lambda > 0$) equivalente al numero di successi che ci si aspetta che si verifichino in un dato intervallo di tempo
- e è la base del logaritmo naturale ($e = 2,71828\dots$)
- x è il numero delle occorrenze (successi) per cui si vuole prevedere la probabilità (deve essere intero non negativo: $x = 0, 1, 2, 3, \dots$)

Ossia $p(x)$ è la probabilità di osservare x volte un evento che si manifesta in media λ volte.

27 / 2 / 2007

Corso I.T.I.S. 2006 - 2007 -
Probabilità e Fisica

31

Distribuzione di Poisson

Le statistiche caratteristiche della poissoniana sono:

Media o valore atteso: $\mu = \lambda$

Varianza: $\sigma^2 = \lambda$

27 / 2 / 2007

Corso I.T.I.S. 2006 - 2007 -
Probabilità e Fisica

32

Distribuzione di Poisson

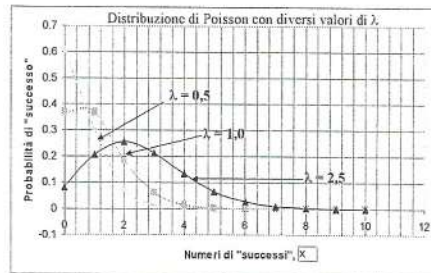
Il grafico della distribuzione di Poisson non è mai simmetrico, anzi è molto asimmetrico, ma tende a divenire sempre meno asimmetrico al crescere di λ . Quando λ è inferiore a 1 la classe più frequente è zero.

27 / 2 / 2007

Corso I.T.I.S. 2006 - 2007 -
Probabilità e Fisica

33

Distribuzione di Poisson



27 / 2 / 2007

Corso I.T.I.S. 2006 - 2007 -
Probabilità e Fisica

34

Distribuzione di Poisson

Formule ricorsive per il calcolo della distribuzione di Poisson

$$p(x = 0) = e^{-\lambda}$$

$$p(x = 1) = \lambda \cdot e^{-\lambda} = \lambda \cdot p(x = 0)$$

$$p(x = 2) = (\lambda^2 / 2) \cdot e^{-\lambda} = (\lambda / 2) \cdot p(x = 1)$$

$$p(x = k) = (\lambda^k / k!) \cdot e^{-\lambda} = (\lambda / k) \cdot p(x = k - 1)$$

27 / 2 / 2007

Corso I.T.I.S. 2006 - 2007 -
Probabilità e Fisica

35

Test χ^2

Occorre ora decidere se i risultati di un esperimento reale sono governati dalla distribuzione limite attesa.

Si esegue quindi un test statistico sulla bontà di adattamento.

27 / 2 / 2007

Corso I.T.I.S. 2006 - 2007 -
Probabilità e Fisica

36

Test χ^2

Si considera un esperimento nel quale si misura un numero x e per il quale si ha ragione di aspettarsi una certa distribuzione dei risultati. Si immagina di ripetere la misura molte volte (N) e, dopo aver diviso l'escursione dei possibili risultati x in n intervalli, $K = 1, \dots, n$ si contano il numero O_K di osservazioni che di fatto cadono in ciascun intervallo K .

27 / 2 / 2007

Corso I.T.I.S. 2006 - 2007 -
Probabilità e Fisica

37

Test χ^2

Assumendo che le misure siano effettivamente governate dalla distribuzione attesa, si calcola il numero atteso:

$$A_K (= N \cdot p_K)$$

delle misure nell'intervallo K -esimo.

27 / 2 / 2007

Corso I.T.I.S. 2006 - 2007 -
Probabilità e Fisica

38

Test χ^2

Infine si calcola χ^2 con la seguente espressione:

$$\chi^2 = \sum_{K=1}^n (O_K - A_K)^2 / A_K$$

27 / 2 / 2007

Corso I.T.I.S. 2006 - 2007 -
Probabilità e Fisica

39

Test χ^2

La variabile χ^2 è una variabile statistica e dipende anche dai gradi di libertà del campione.

27 / 2 / 2007

Corso I.T.I.S. 2006 - 2007 -
Probabilità e Fisica

40

Test χ^2

Il numero di gradi di libertà d in un calcolo statistico è definito nel seguente modo:

$$d = k - 1 - m$$

dove:

k = numero di classi in cui è stato suddiviso il campione

m = numero dei parametri della distribuzione teorica stimati servendosi dei dati campione

27 / 2 / 2007

Corso I.T.I.S. 2006 - 2007 -
Probabilità e Fisica

41

Test χ^2

Esistono tabelle che forniscono i valori di χ_α^2 (detti valori critici) per i quali:

$$P(\chi^2 > \chi_\alpha^2) = \alpha$$

per alcuni valori di α (di solito vengono usati i valori 5% o 1% o 0,1%) e per i gradi di libertà d

27 / 2 / 2007

Corso I.T.I.S. 2006 - 2007 -
Probabilità e Fisica

42

Test χ^2

Se risulta:

$$\chi^2 \leq \chi_{\alpha}^2$$

allora significa che la probabilità che le differenze siano imputabili solo al caso è alta.

Test χ^2

Se invece il valore di χ^2 stimato risulta maggiore del valore di χ_{α}^2 determinato tramite le tavole della distribuzione del Chi quadro per il caso in esame si deve rifiutare l'ipotesi che le due distribuzioni coincidano: la distribuzione teorica non è quindi confermata dai dati sperimentali.

Test χ^2

Questa procedura, detta Test Chi - quadro di adattamento, è valida purché:

- le frequenze assolute attese siano tutte maggiori o uguali a 5.
- il numero totale di osservazioni sia superiore a 100.

Test χ^2

Se la prima condizione non è rispettata si accorpano opportunamente due o più classi contigue.

Se la seconda condizione non è rispettata e il numero di osservazioni è tra 30 e 100 si deve apportare la **correzione di Yates** o correzione per la continuità:

si sottrae 0,5 allo scarto (tra frequenza osservata e frequenza attesa) maggiore in valore assoluto e si aggiunge 0,5 allo scarto minore in valore assoluto.

Test χ^2

ESEMPIO NUMERICO

Si ipotizza che il numero di errori di stampa presenti in un testo segua una distribuzione di Poisson.

Test χ^2

In un campione casuale di 60 pagine il numero di errori presenti è riportato in tabella:

Numero di errori	Frequenza osservata
0	32
1	15
2	9
3	4

Si chiede di verificare se i dati sono in accordo con la distribuzione di Poisson.

Test χ^2

Il valore medio della distribuzione di Poisson è incognito e deve essere calcolato dai dati:

$$\lambda = (0 \cdot 32 + 1 \cdot 15 + 2 \cdot 9 + 3 \cdot 4) / 60 = 0,75$$

Le corrispondenti frequenze assolute attese si ottengono moltiplicando le frequenze relative per 60.

Errori	P_k	A_k	O_k
0	0,4724	28,34	32
1	0,3543	21,26	15
2	0,1329	7,97	9
≥ 3	0,0404	2,42	4

Poiché l'ultima classe ha una frequenza assoluta attesa minore di 5, si accorpano le ultime due classi

27 / 2 / 2007

Corso I.T.I.S. 2006 - 2007 -
Probabilità e Fisica

49

Test χ^2

Errori	O_k	A_k	$(O_k - A_k)^2 / A_k$
0	32	28,34	0,47
1	15	21,26	1,84
≥ 2	13	10,39	0,66

Il valore della statistica chi - quadro calcolato dai dati del campione è:

$$\begin{aligned} \chi^2 &= (32 - 28,34)^2 / 28,34 + (15 - 21,26)^2 / 21,26 + (13 - 10,39)^2 / 10,39 = \\ &= (3,66)^2 / 28,34 + (-6,26)^2 / 21,26 + (2,61)^2 / 10,39 = 0,47 + 1,84 + 0,66 = \\ &= 2,97 \end{aligned}$$

27 / 2 / 2007

Corso I.T.I.S. 2006 - 2007 -
Probabilità e Fisica

50

Test χ^2

Le classi, dopo l'accorpamento sono 3 e il valore medio della distribuzione è stato stimato dal campione, perciò il grado di libertà è:

$$d = k - 1 - m = 3 - 1 - 1 = 1$$

Il valore critico al livello di significatività del 5% è (dalle tabelle):

$$\chi_{0,05,1}^2 = 3,841$$

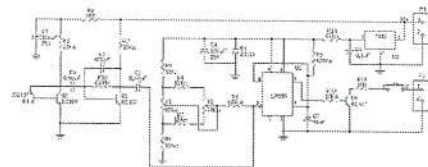
Dato che il valore della statistica calcolato dal campione è minore del valore critico, non si può rifiutare l'ipotesi che i dati si adattino alla distribuzione di Poisson di parametro $\lambda = 0,75$.

27 / 2 / 2007

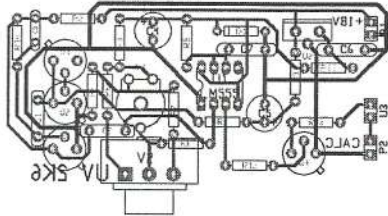
Corso I.T.I.S. 2006 - 2007 -
Probabilità e Fisica

51

Circuito Schema



Circuito Montaggio componenti 2



27 / 2 / 2007

Corso I.T.I.S. 2006 - 2007 -
Probabilità e Fisica

55

Circuito Elenco componenti

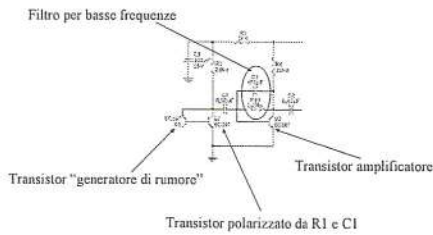
TYPE / VALUE	QTY	COMPONENT REFERENCE IDENTIFICATION	TYPE / VALUE	QTY	COMPONENT REFERENCE IDENTIFICATION
478 pF	1	C3	1 KΩ 5% W	1	R9
47 nF	1	C7	10 KΩ 5% W	2	R2 R3
100 μF, 25 V	2	C4 C5	10 KΩ 5% W	3	R6 R7 R12
0.1 μF	1	C6	22 KΩ 5% W	1	R1
0.47 μF	1	C2	100 KΩ 5% W	1	R8
0.68 μF	1	C1	470 KΩ 5% W	1	R5
Z9.1 V	1	D1	1 MΩ 5% W	1	R13
SOP Encoder	2	F1 F2	7812	1	U2
DC 19V	4	Q1 Q2 Q3 Q4	LM 555	1	U1
10 KΩ 5% W	1	R4	SWPUSHBUTTON	1	U3
2.2 MΩ 5% W	1	R10	10 KΩ Pot	2	V1 V2
220 Ω 5% W	1	R11			

27 / 2 / 2007

Corso I.T.I.S. 2006 - 2007 -
Probabilità e Fisica

56

Circuito

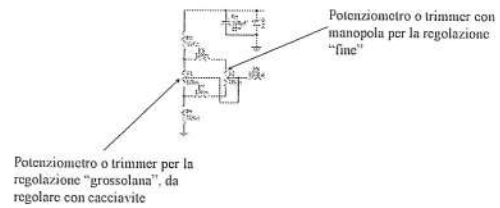


27 / 2 / 2007

Corso I.T.I.S. 2006 - 2007 -
Probabilità e Fisica

57

Circuito

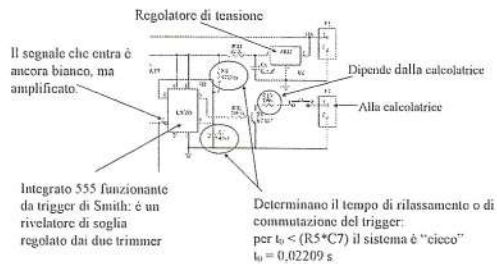


27 / 2 / 2007

Corso I.T.I.S. 2006 - 2007 -
Probabilità e Fisica

58

Circuito



27 / 2 / 2007

Corso I.T.I.S. 2006 - 2007 -
Probabilità e Fisica

59

Misura

La misura viene effettuata nel seguente modo:

- Vengono contati, per un intervallo di tempo di 5 s il numero di "eventi"
- Vengono effettuate almeno 50 misure

27 / 2 / 2007

Corso I.T.I.S. 2006 - 2007 -
Probabilità e Fisica

60

Misura

Il conteggio del segnale è effettuato dalla calcolatrice.

Si accende la calcolatrice e si battono i tasti:

“1” “+” “=”

Si chiude con il pulsante il circuito e si inizia il conteggio.

Misura Tabelle raccolta dati

Intervallo di tempo (5 s)	Conteggi cumulati	Conteggi in 5 s
1
2
...
50

Misura Tabelle raccolta dati

Numero di conteggi x	Numero intervallo K	O_K	$p_k(x) = \lambda^x \cdot e^{-\lambda} / x!$	$A_k = N \cdot p_k(x)$
0
1
...
n

Misura

Gradi di libertà: $d = k - 1 - m = \dots\dots\dots$

$$\chi^2 = \sum_{K=1}^n (O_K - A_K)^2 / A_K$$

$\chi^2 = \dots\dots\dots$

Bibliografia

John R. Taylor - Introduzione all'analisi degli errori: lo studio delle incertezze nelle misure fisiche - Zanichelli Editore, 1990.

Romano Scozzafava - Primi passi in probabilità e statistica - Zanichelli.

Jacob Millman, Christos C. Halkias - MICRO ELETTRONICA - Boringhieri, 1978

<http://wikipedia.org/wiki/>

ESPERIENZA

Numero di misure totali

80

Intervallo di tempo	Conteggi cumulati	Conteggi in 5 s	Intervallo di tempo	Conteggi cumulati	Conteggi in 5 s
1	0	0	41	86	0
2	1	1	42	91	5
3	3	2	43	93	2
4	4	1	44	95	2
5	6	2	45	97	2
6	7	1	46	98	1
7	8	1	47	99	1
8	9	1	48	101	2
9	11	2	49	104	3
10	14	3	50	106	2
11	14	0	51	106	0
12	17	3	52	107	1
13	19	2	53	108	1
14	23	4	54	110	2
15	26	3	55	113	3
16	28	2	56	117	4
17	33	5	57	117	0
18	34	1	58	117	0
19	35	1	59	119	2
20	36	1	60	120	1
21	39	3	61	121	1
22	42	3	62	123	2
23	45	3	63	124	1
24	47	2	64	126	2
25	49	2	65	128	2
26	51	2	66	129	1
27	52	1	67	132	3
28	52	0	68	133	1
29	57	5	69	135	2
30	58	1	70	137	2
31	60	2	71	137	0
32	62	2	72	137	0
33	64	2	73	140	3
34	66	2	74	141	1
35	67	1	75	141	0
36	68	1	76	142	1
37	71	3	77	143	1
38	76	5	78	144	1
39	80	4	79	144	0
40	86	6	80	148	4

DATI RAGGRUPPATI

Conteggi in 5 s Occorrenze

0	11
1	25
2	24
3	11
4	4
5	4
6	1
7	

Media 1,85

Distribuzione di Poisson

0	12,578973
1	23,271101
2	21,525768
3	13,274224
4	6,1393284
5	2,2715515
6	0,7003951
7	0,1851044

Numero di conteggi x	Numero di osservazioni OK	Numero atteso di osservazioni AK
0	11	12,58
1	25	23,27
2	24	21,53
3	11	13,27
4	4	6,14
5	4	2,27
6	1	0,70
7		0,19

Valore medio della distribuzione attesa, in base ai dati misurati = 1,85

Numero totale di misure 80

Numero di intervalli 5

RAGGRUPPAMENTO DATI IN CLASSI

Numero di eventi	Classe	OK	AK
0	1	11	12,58
1	2	25	23,27
2	3	24	21,53
3	4	11	13,23
> 4	5	9	9,34

Gradi di libertà: $d = k - 1 - m = 5 - 1 - 1 = 3$

Chi-Quadro:

$$(11-12.58)^2/12.58+(25-23.27)^2/23.27+(24-21.53)^2/21.53+(11-13.23)^2/13.23+(9-9.34)^2/9.34$$

0,999

Chi-Quadro-alfa = 7,815

0,999 < 7.815

Confronto tra distribuzione osservata e attesa

