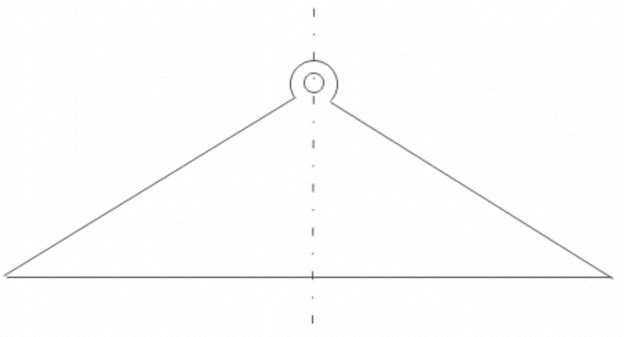
Dall'altezza del Sole alle funzioni goniometriche (L.Togliani) – MN, 15/11/05

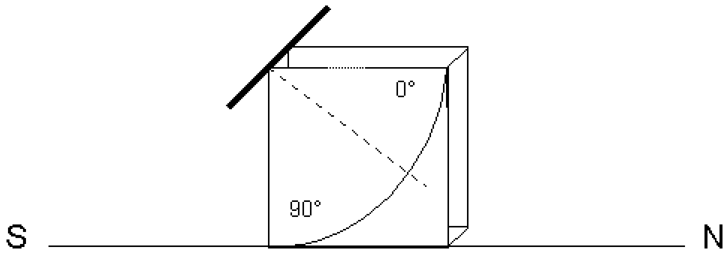
MATERIALI

a) gnomone di cartoncino

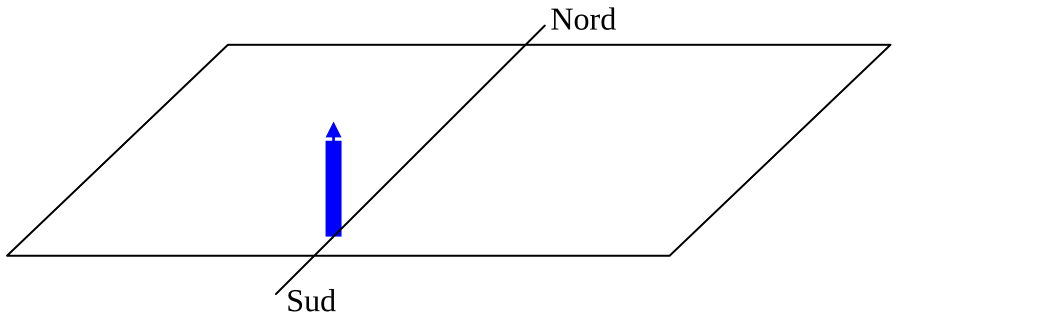
altezza 7,0 cm base 20,0 cm



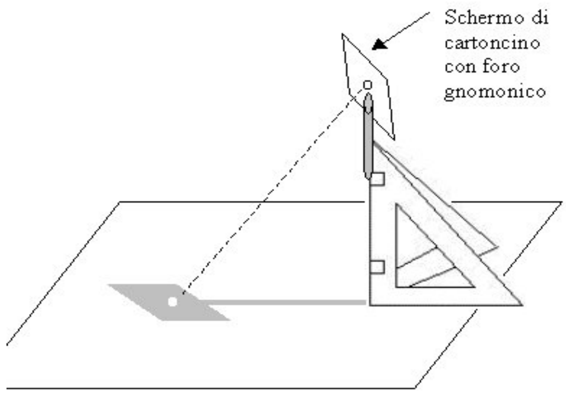
b) plinto

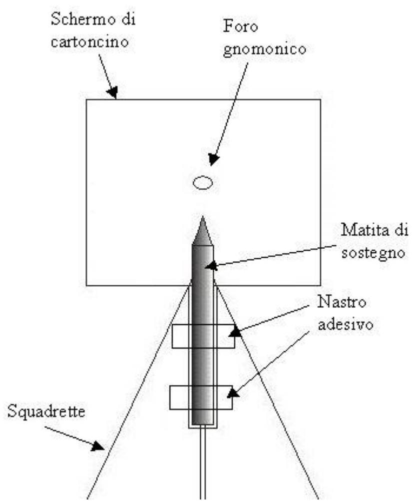


c) gnomone con matita fissato con nastro adesivo su cartoncino attaccato al tavolo

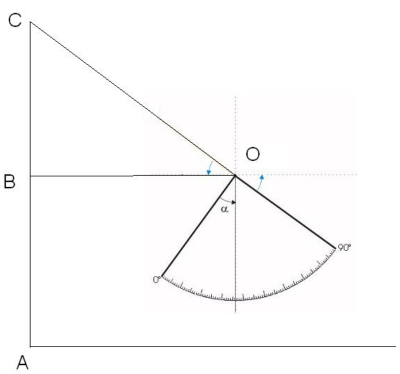


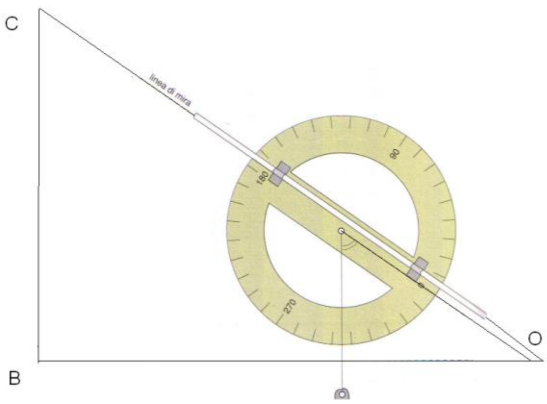
d) due squadre





e) altezza di un edificio





$$\alpha = BOC$$

$$\overline{BC} = \overline{OB} \cdot tg\alpha$$

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{OB} \cdot tg\alpha$$

Dall'altezza del Sole alle funzioni goniometriche - I

Luigi Togliani

“Luce, suono e moto”

Corso A.I.F. e I.T.I.S. “Fermi” di Mantova

A. S. 2005-06

Mantova, 15 novembre 2005

Scopo

Osservazioni e misure sperimentali

↓

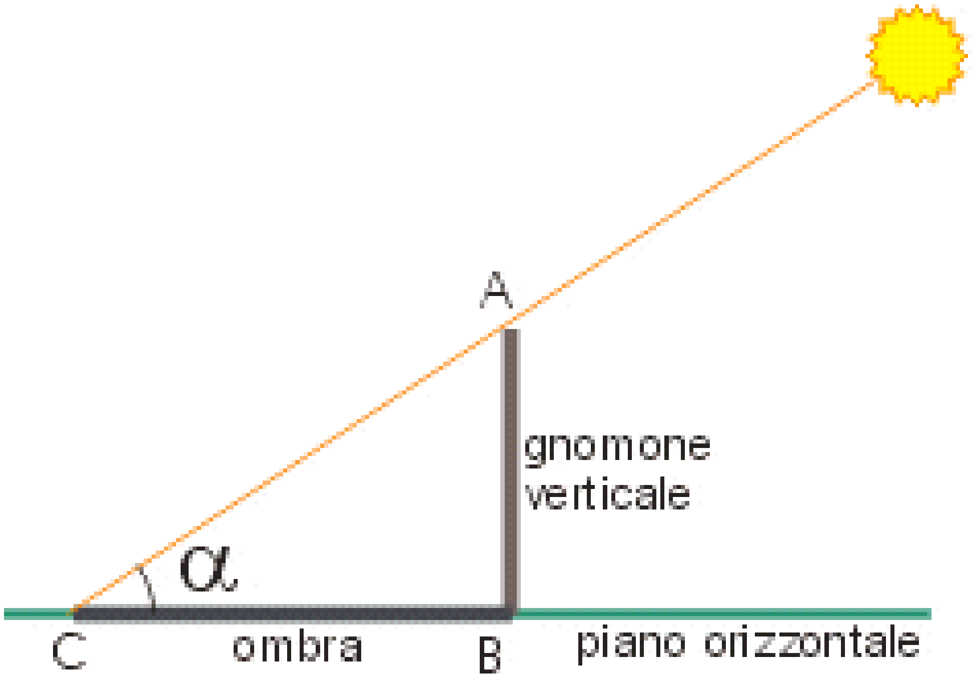
Funzioni goniometriche

Mappa


altezza del Sole
con l'uso di
gnomone
gnomone fotosciaterico
finestra
due squadre
plinto
con l'uso degli strumenti da disegno e della tangente
calcolo di un valore
variazioni nel tempo
giornaliere
annuali

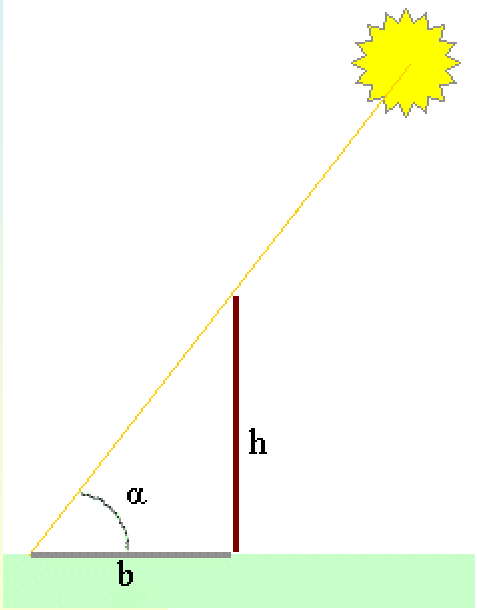
Altezza del Sole

E' l'angolo α in figura

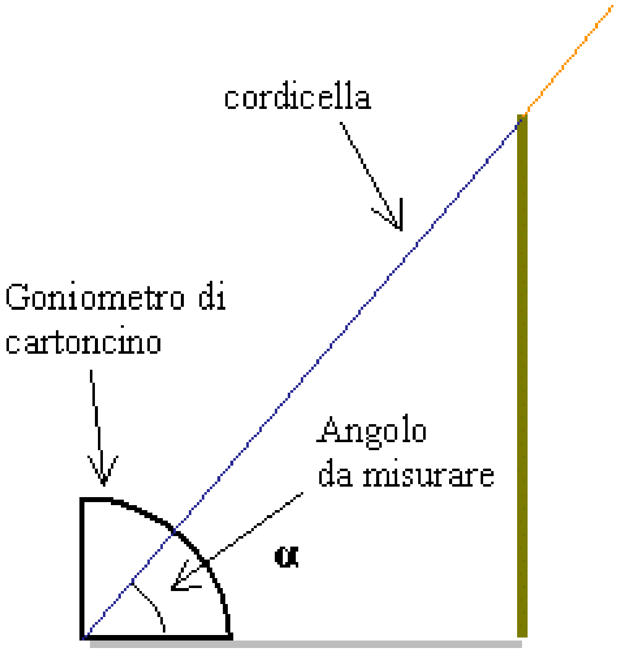


Metodo del bastone

senza goniometro

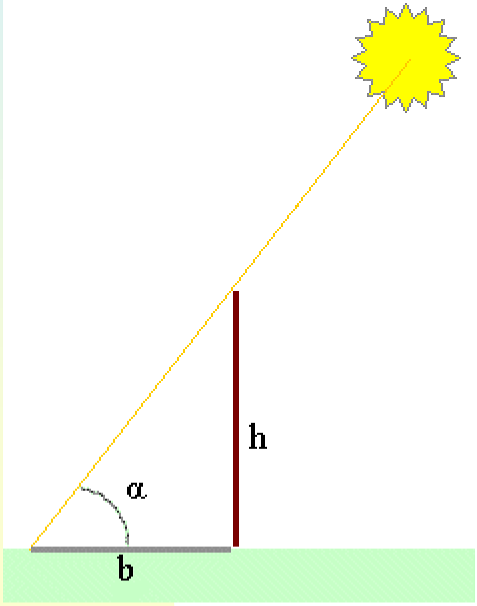


con goniometro



Misura dell’altezza del Sole

costruendo un triangolo simile



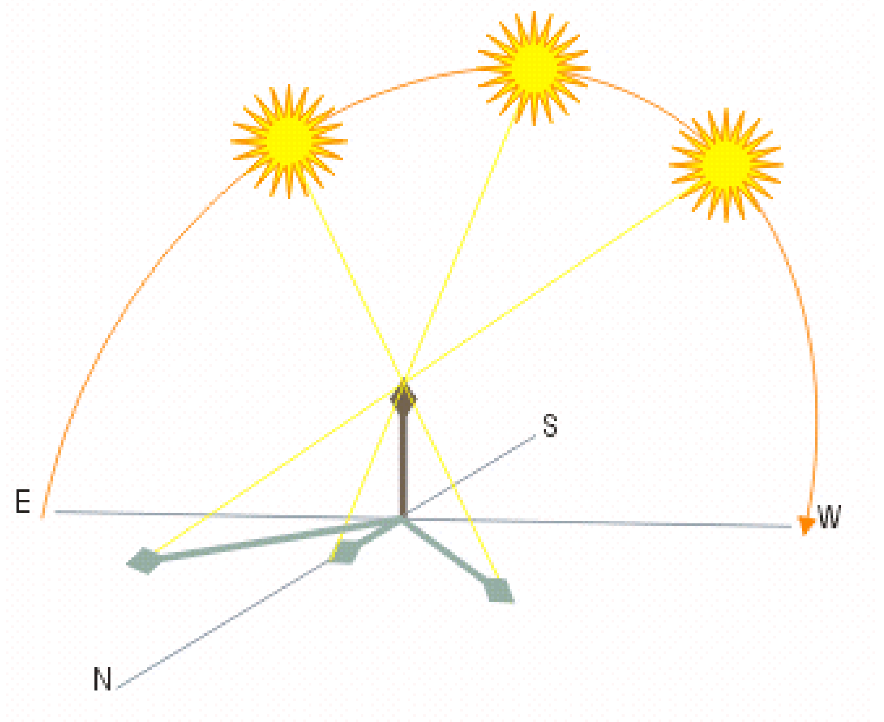
introducendo una funzione di α

$$tg\alpha = \frac{h}{b}$$

$$\alpha = arctg\left(\frac{h}{b}\right)$$

Gnomone

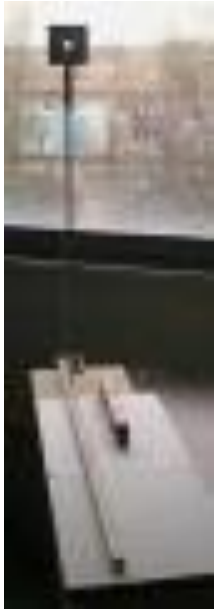
Gnomone e ombre



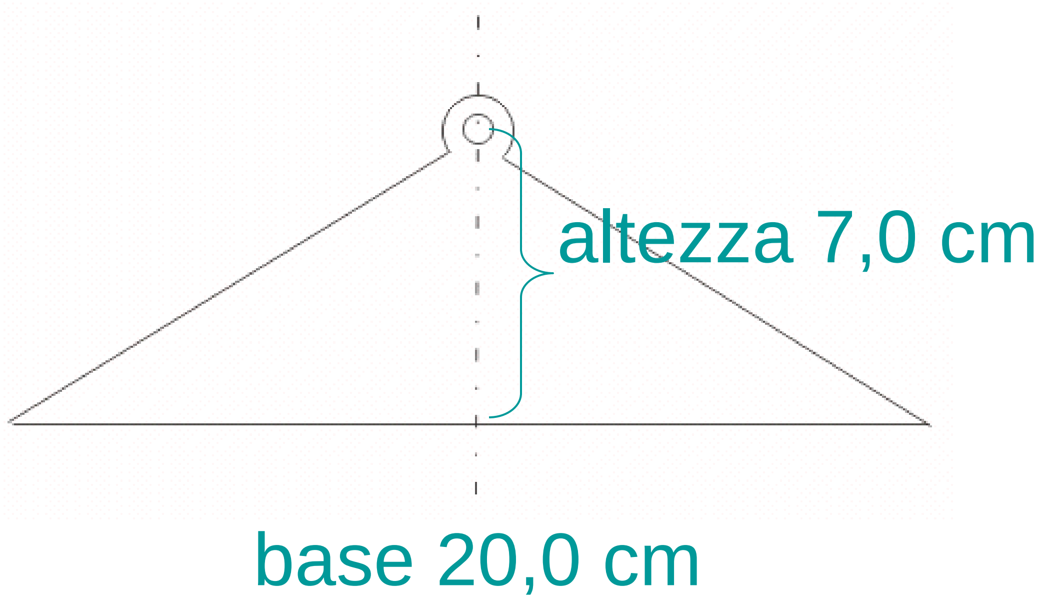
Gnomone in laboratorio

Uso di materiali di laboratorio di Fisica






Gnomone fotosciaterico di cartoncino

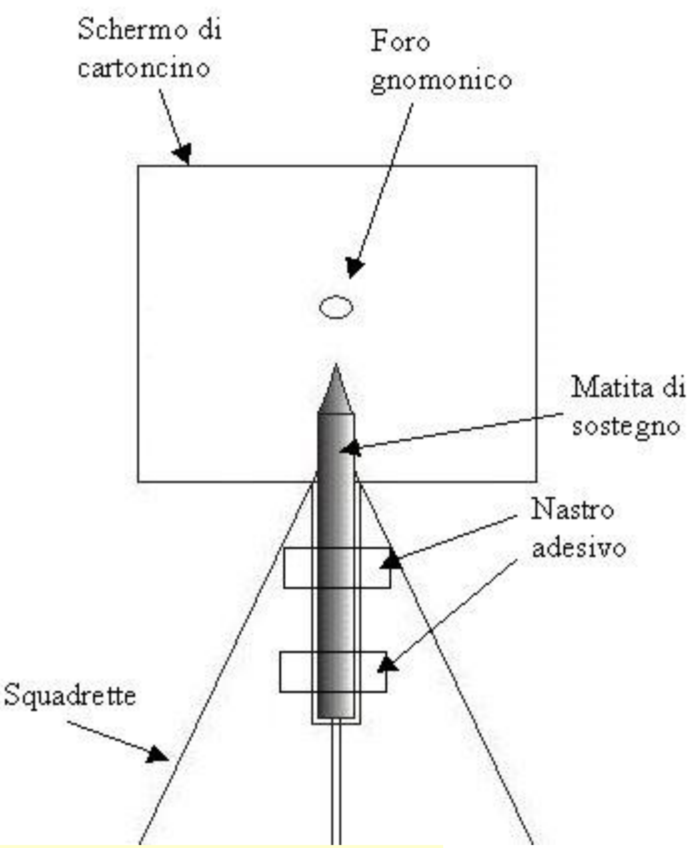


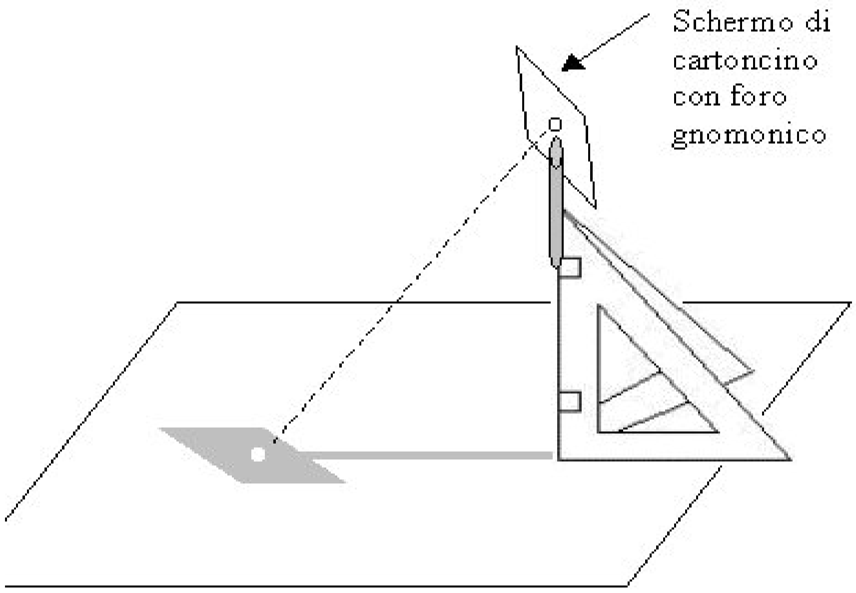
Metodo della finestra

Foglio con foro gnomonico alla finestra

Metodo delle due squadre

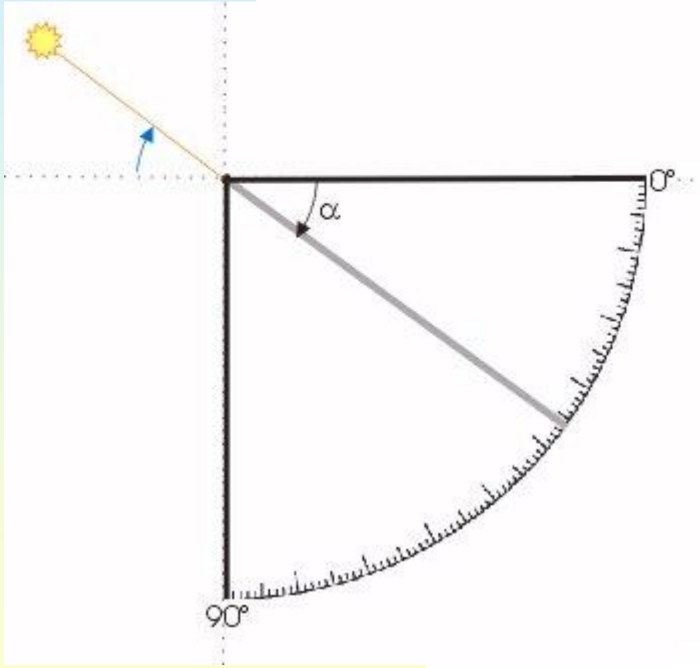
Uso di due squadre verticali



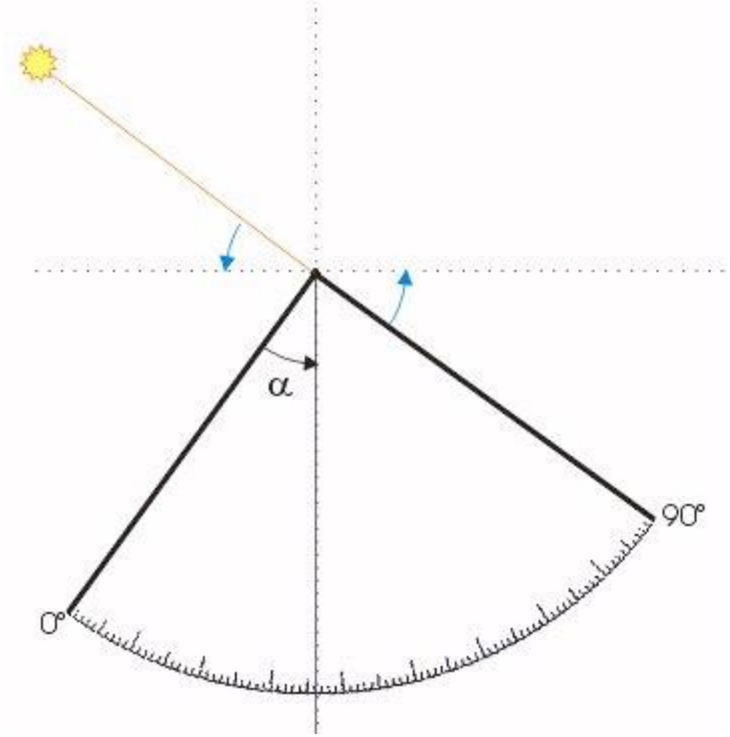


Quadranti

quadrante fisso

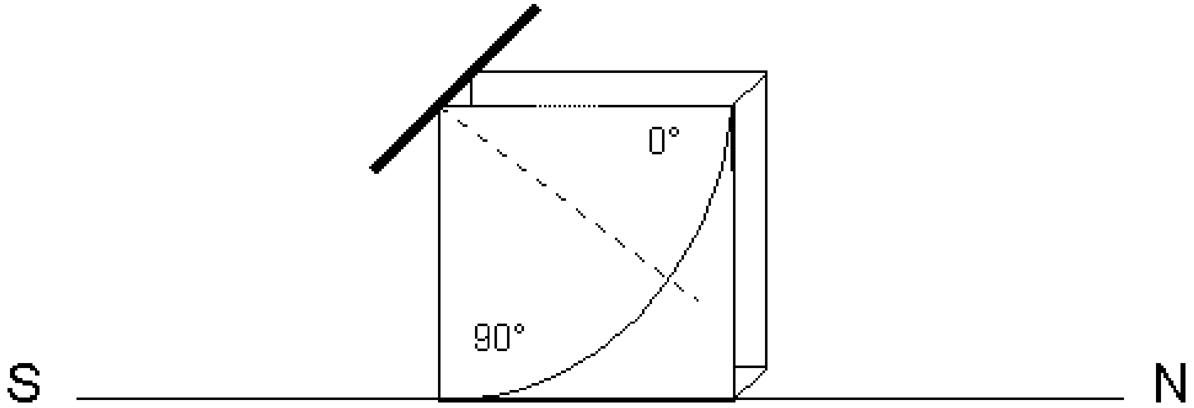


quadrante mobile



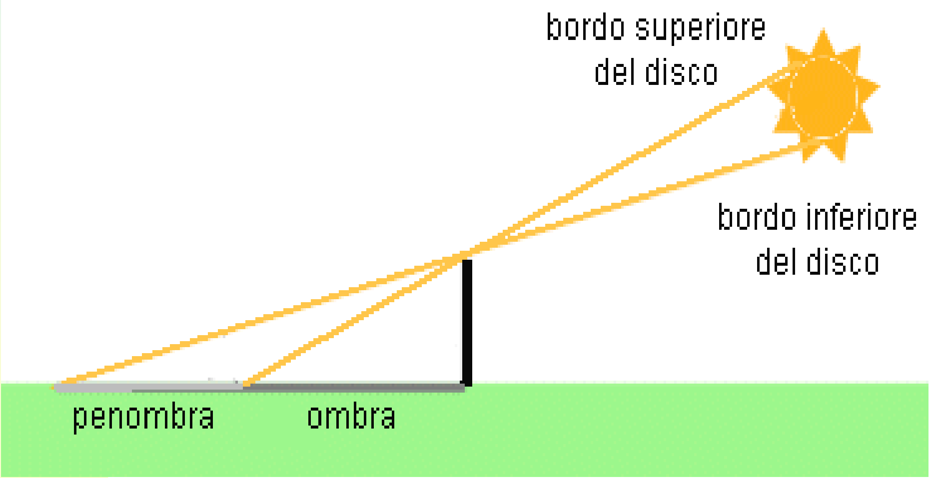
Plinto tolemaico

Plinto con scatola da CD



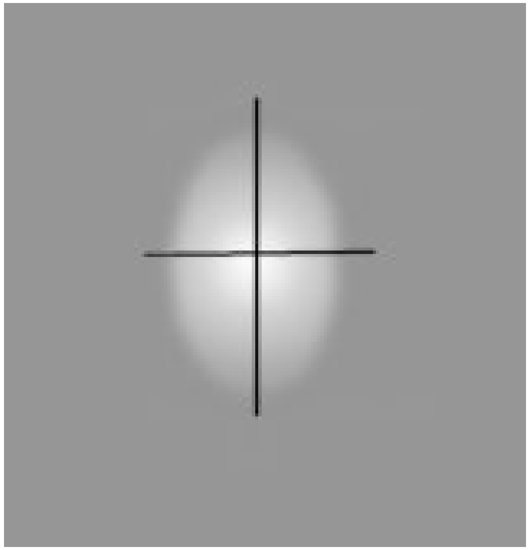
Cause d’errore

- Verticalità dello gnomone
- Orizzontalità del piano
- Ombra e penombra



Uso del foro gnomonico

Errore nel determinare il centro dell’ellisse luminosa



Esempio di calcolo

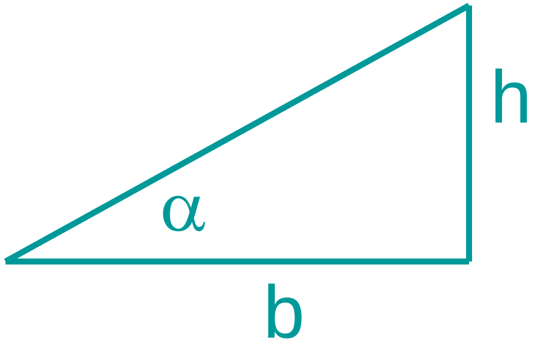
Uso dello gnomone di cartoncino
e della calcolatrice scientifica tascabile

$$tg\alpha = \frac{h}{b} = \frac{(7,00 \pm 0,05)cm}{(10,40 \pm 0,05)cm}$$

$$tg\alpha = 0,67 \pm 0,02$$

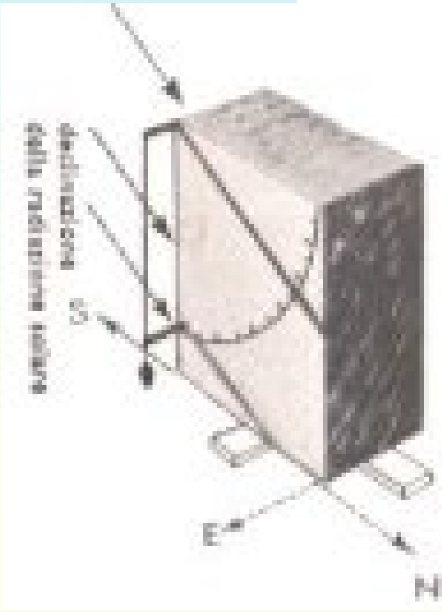
$$0,65 \leq tg\alpha \leq 0,69$$

$$\alpha = (33,8 \pm 0,8)°$$



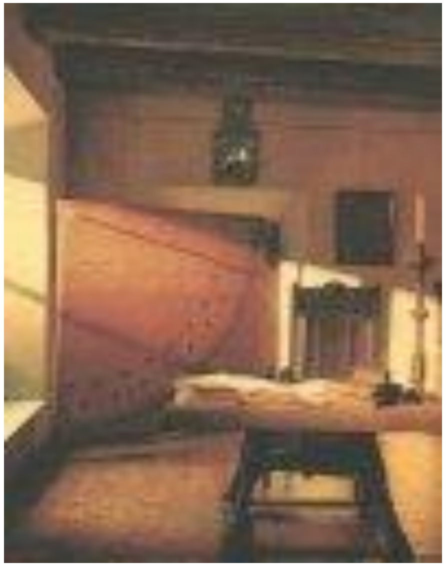
Strumenti antichi

plinto di Tolomeo



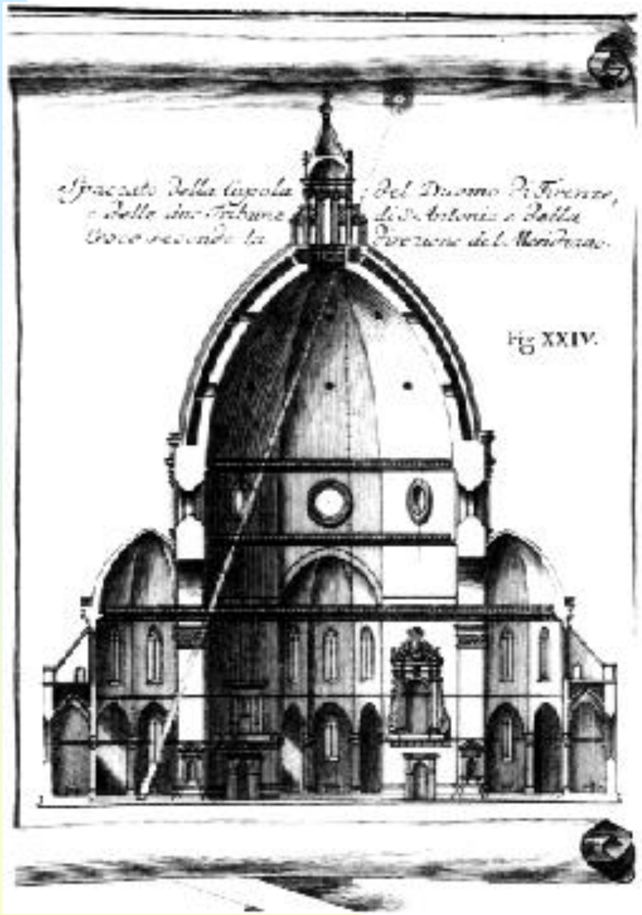
quadrante di Ticho Brahe

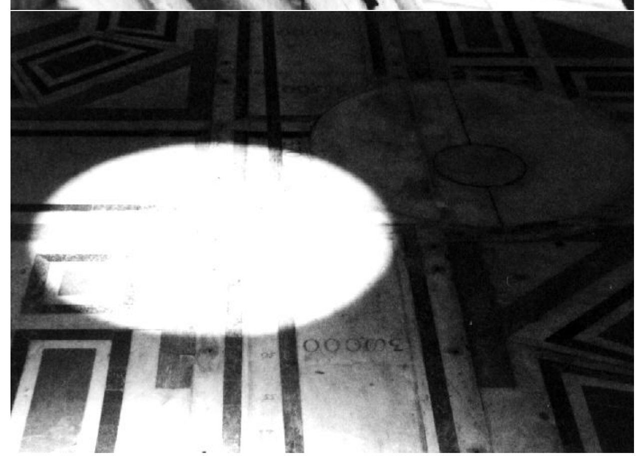
studio di Copernico



S. Maria del Fiore - Firenze

Gnomone fotosciaterico - altezza 90 m

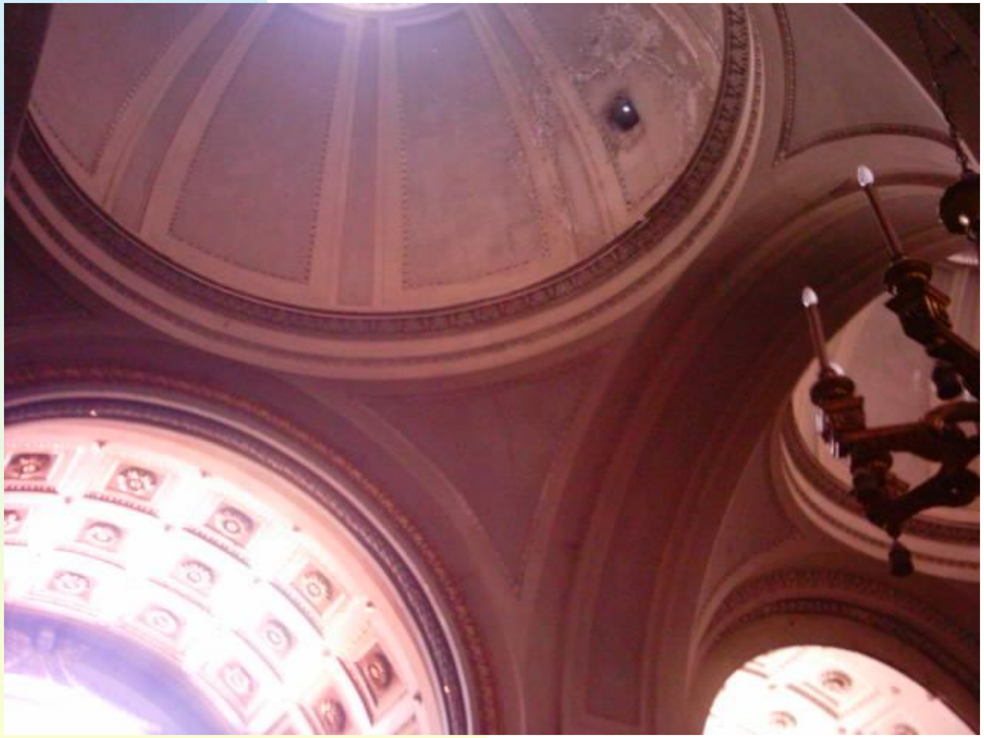


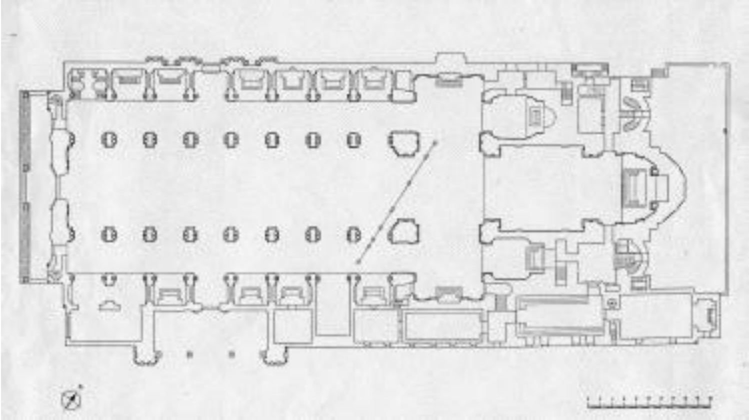


Paolo Toscanelli 1475

Cattedrale di Palermo

Gnomone: foro alto 22 m dal suolo

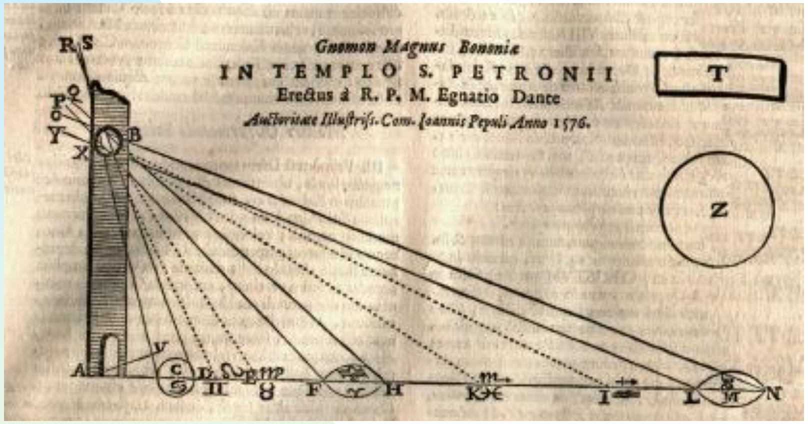


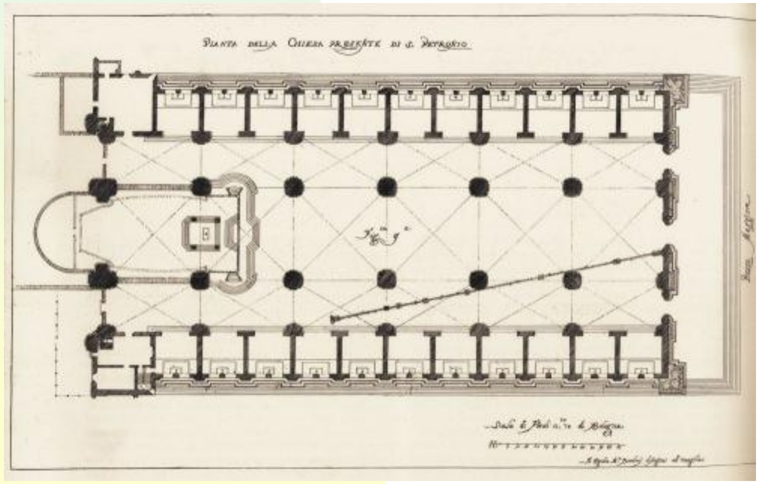


Giuseppe Piazzi 1801

Cattedrale di San Petronio - Bologna

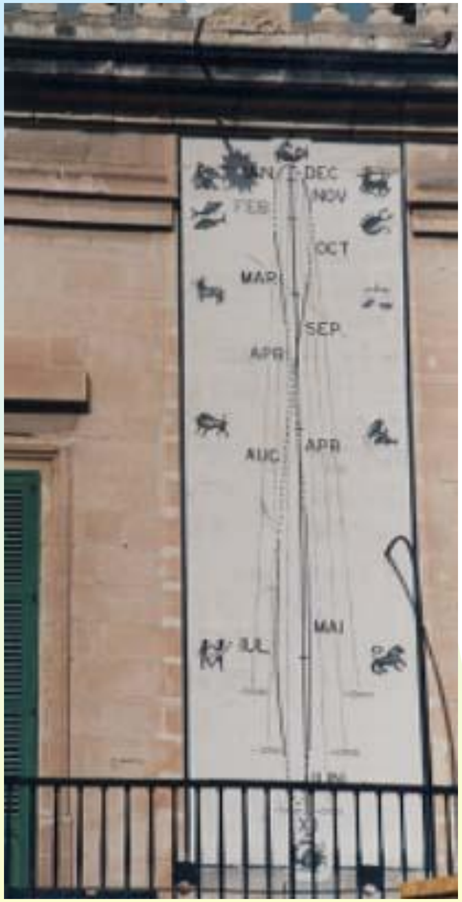
E. Danti 1576 - **G.D. Cassini 1655** : foro gnomonico alto 27 m dal suolo, linea meridiana 67 m (la più lunga)





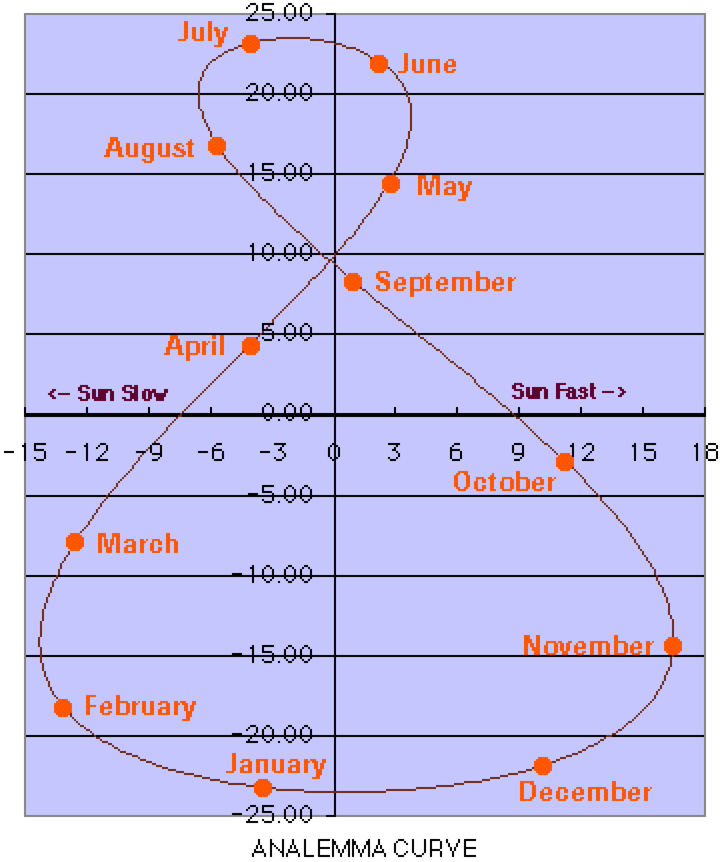
Analemma

Registrare per un anno la posizione solare ogni giorno alla stessa ora



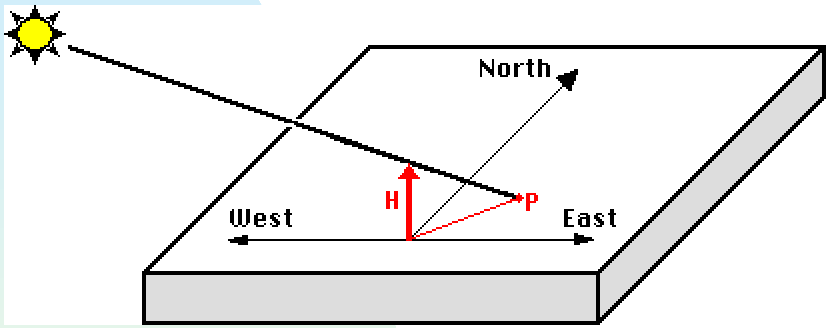
La Valletta - Malta

Bergamo -P.za Angelini



Altezza del Sole durante una giornata

L'ombra dello gnomone al passare delle ore



Raccolta dati altezza del Sole

Utilizzo di Excel

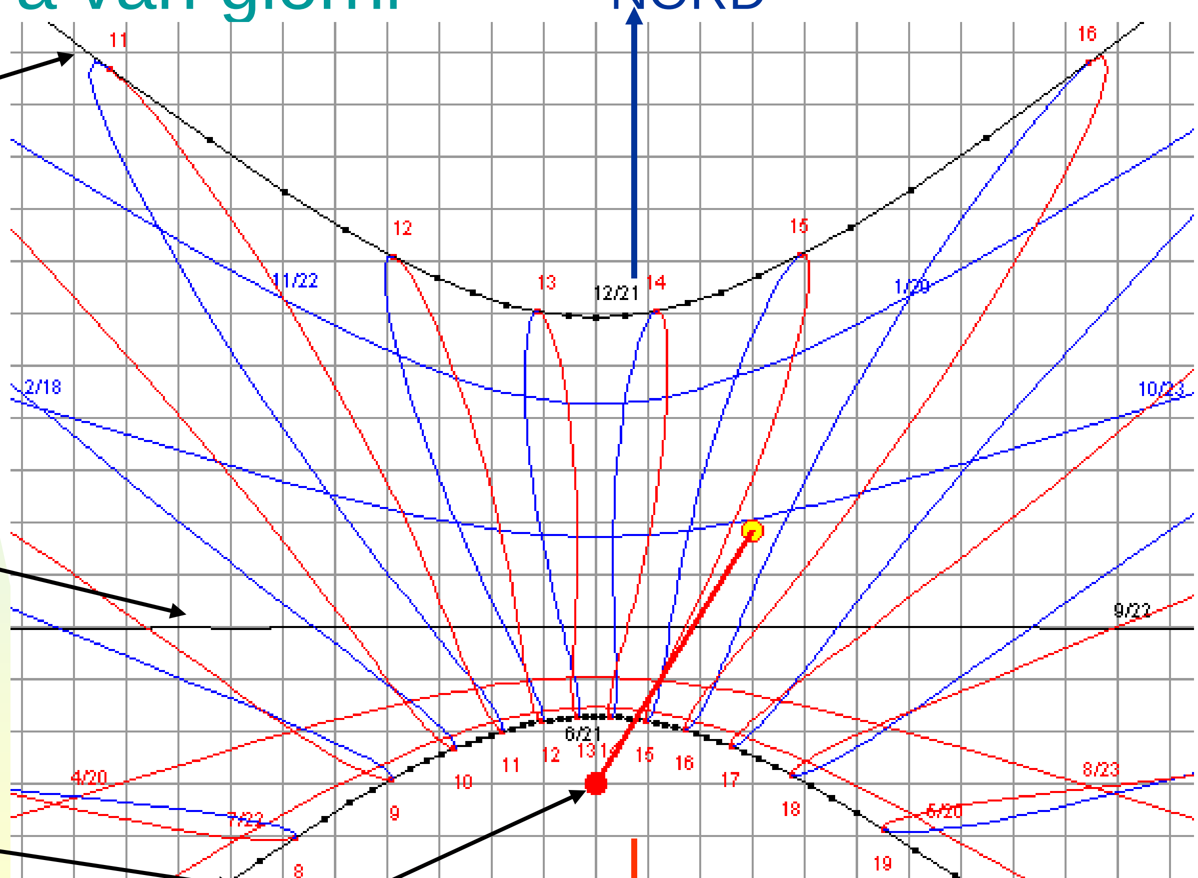
9,8	0,71	0,620	35,5		10.50	48,5		
5,0	1,46	0,970	55,6		10.55	48,7		
4,8	1,52	0,989	56,7		11.00	49,4		
					11.05	49,6		
h=7,0 cm	b=13,7 cm	h/b=0,51	altezza 27°		11.10	50,4		
					11.15	50,6		
					11.20	51,6		
b (cm)	h/b	h/b media			11.25	51,8		
14,0	0,50	0,52			11.30	52,1		
16,5	0,52							
11,8	0,51	altezza (°)			data	29/08/2005		
11,0	0,51	27						
17,0	0,54			Mantova	4^ C PNI	altezza	declinaz.	latitudine
15,0	0,56			22/12/2005	ore 12.25	21,5°	-23,5°	45,0°

Altezza del Sole nel corso di un anno

Curve relative a vari giorni

NORD

solstizio invernale



equinozi

solstizio estivo

gnomone

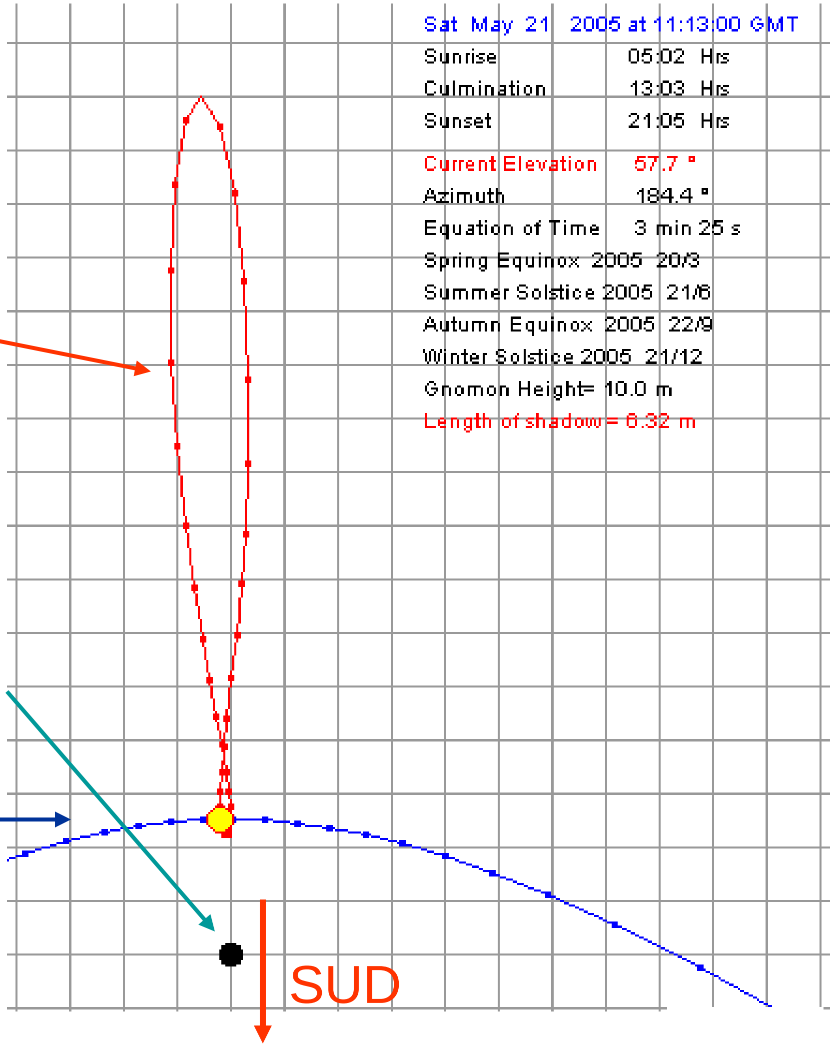
SUD

Analemma, gnomone e altezza solare

Analemma ottenuto con l'ombra gnomonica per l'altezza solare ad una fissata ora in vari giorni dello stesso anno

gnomone

Registrazioni dell'ombra dello gnomone relativa all'altezza solare in una stessa giornata

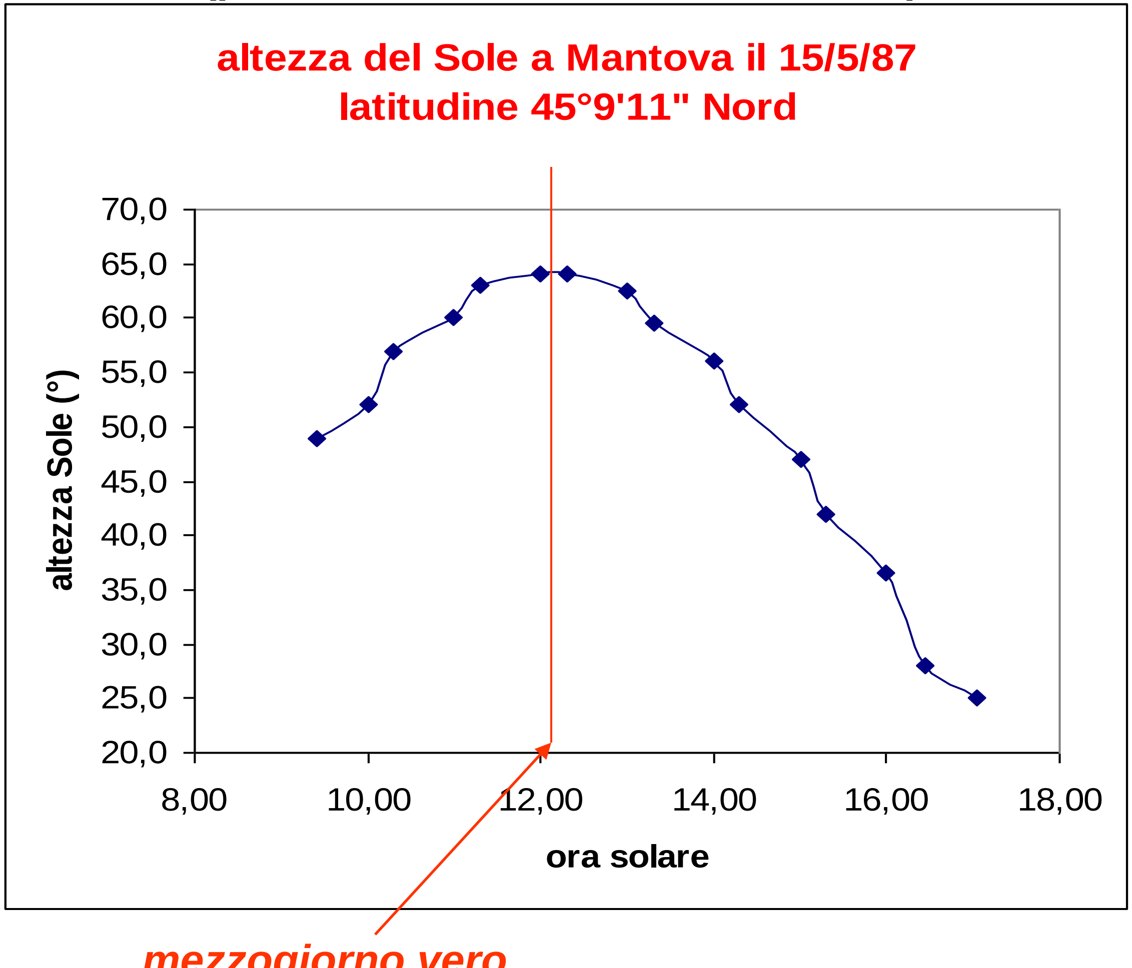


Altezza solare in funzione del tempo

ora solare	altezza Sole (°)
9,40	49,0
10,00	52,0
10,30	57,0
11,00	60,0
11,30	63,0
12,00	64,0
12,30	64,0
13,00	62,5
13,30	59,5
14,00	56,0
14,30	52,0
15,00	47,0
15,30	42,0
16,00	36,5
16,45	28,0
17,05	25,0

VARIAZIONE GIORNALIERA ALTEZZA SOLARE

(prof. Maurizio Francesio, Mantova)



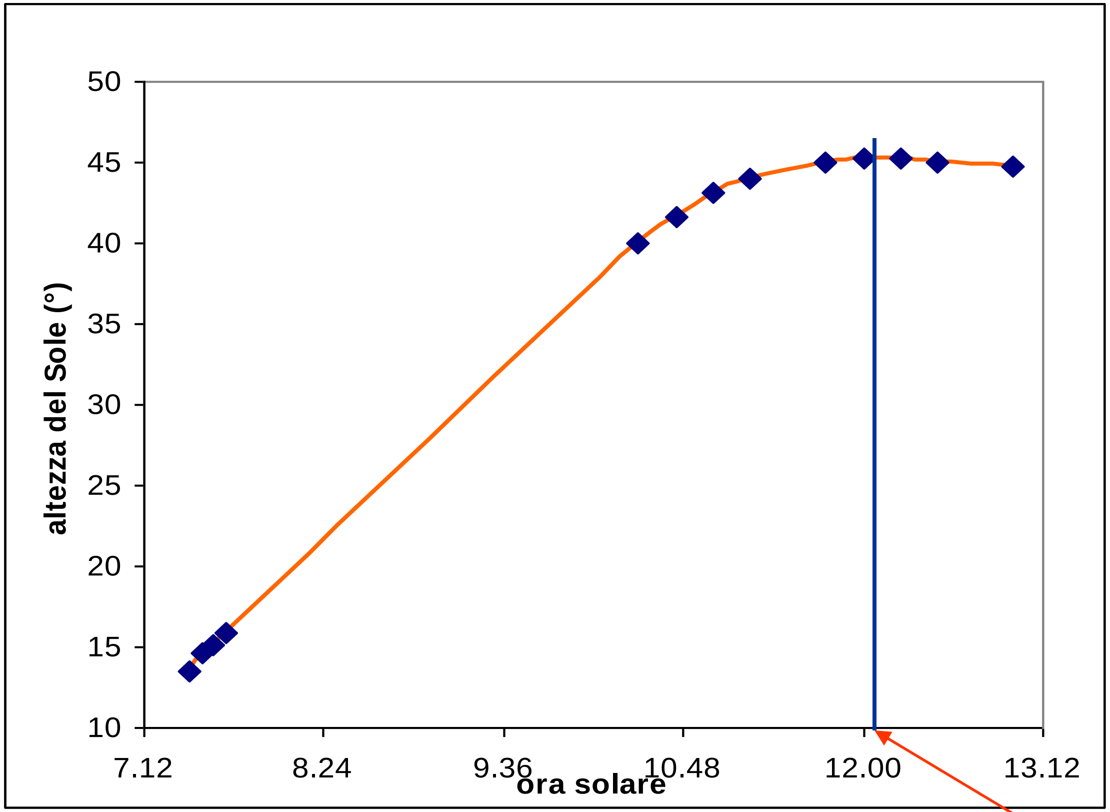
Altezza solare in funzione del tempo

ora solare	altezza Sole (°)
7.30	13,5
7.35	14,6
7.40	15,1
7.45	15,9
10.30	40,0
10.45	41,6
11.00	43,1
11.15	44,0
11.45	45,0
12.00	45,3
12.15	45,3
12.30	45,0
13.00	44,7

VARIAZIONE GIORNALIERA ALTEZZA SOLARE

(Luigi Togliani, Mantova - 4^G Liceo "Belfiore")

Altezza del Sole a Mantova il 22/9/05 (equinozio)



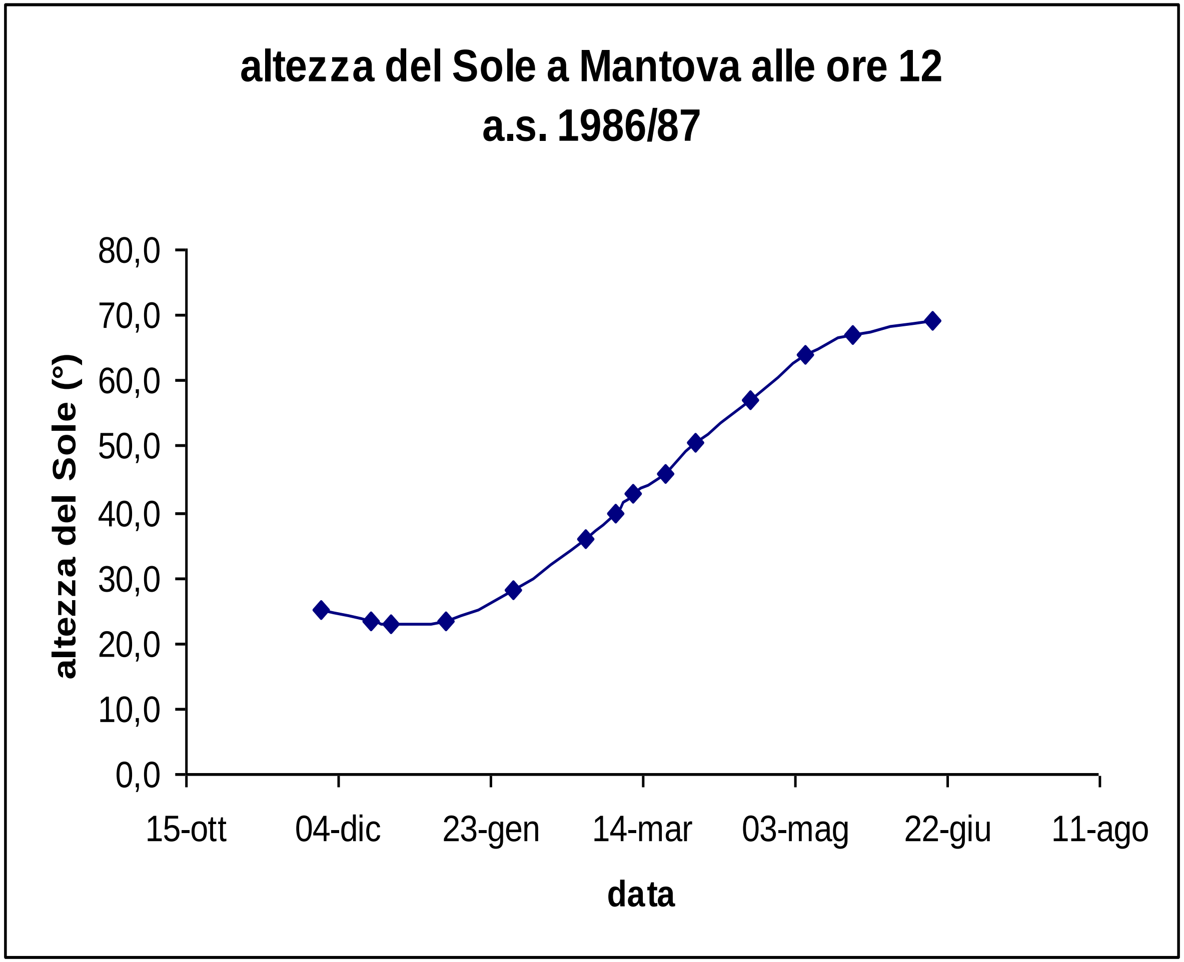
mezzogiorno vero

Altezza solare in funzione del tempo

data	altezza Sole (°)
28-nov	25,0
15-dic	23,5
21-dic	23,0
08-gen	23,5
30-gen	28,0
23-feb	36,0
05-mar	40,0
11-mar	43,0
21-mar	46,0
31-mar	50,5
18-apr	57,0
06-mag	64,0
22-mag	67,0
17-giu	69,0

VARIAZIONE ANNUALE ALTEZZA SOLARE

(prof. Maurizio Francesio, Mantova)



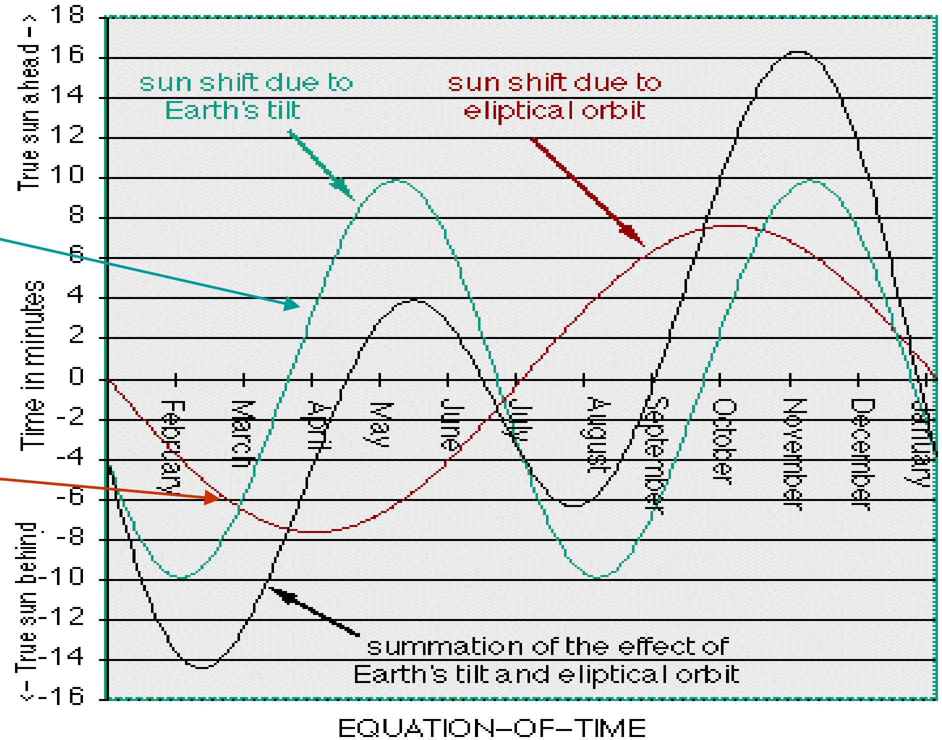
Quando è mezzogiorno?

Perché il mezzogiorno vero non è quasi mai alle 12.00 solari?

- la località non è quasi mai al centro del fuso orario
- irregolarità del moto del Sole rispetto alla Terra (equazione del tempo)

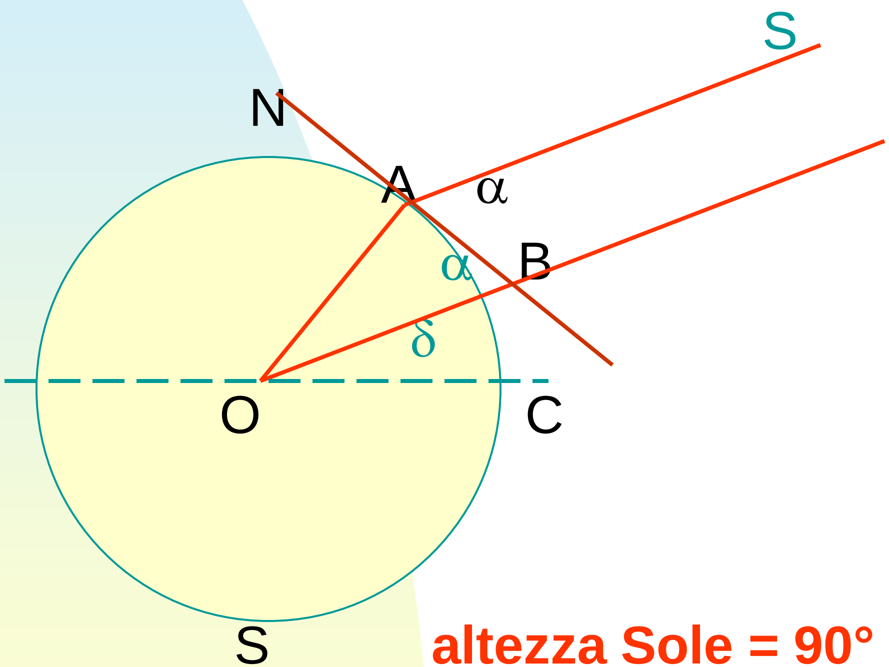
inclinazione asse terrestre

orbita ellittica



Latitudine e altezza del Sole

Declinazione del Sole δ : latitudine alla quale il Sole raggiunge lo zenith in un certo giorno



λ =AÔC latitudine di A

α =SÂB altezza del Sole

δ =BÔC declinazione del Sole

BÂO = 90°

Nel triangolo rettangolo ABO:

$\lambda - \delta + \alpha = 90°$.

Dunque a mezzogiorno vero:

$$\boldsymbol{\alpha = 90° - \lambda + \delta}$$

altezza Sole = 90° - latitudine + declinazione Sole

Per conoscere le declinazione del Sole in un certo giorno occorre consultare un'apposita tabella. Latitudine Mantova 45°9'11"

Declinazione del Sole

DATA	MEZZOGIORNO VERO A GREENWICH	DECLINAZIONE
23/08/2005	12hh 02mm 34ss	11° 19' Nord
24/08/2005	12hh 02mm 18ss	10° 58' Nord
25/08/2005	12hh 02mm 01ss	10° 38' Nord
26/08/2005	12hh 01mm 44ss	10° 17' Nord
27/08/2005	12hh 01mm 27ss	9° 56' Nord
28/08/2005	12hh 01mm 10ss	9° 35' Nord
29/08/2005	12hh 00mm 52ss	9° 13' Nord
30/08/2005	12hh 00mm 33ss	8° 52' Nord
31/08/2005	12hh 00mm 15ss	8° 30' Nord
01/09/2005	11hh 59mm 56ss	8° 09' Nord
02/09/2005	11hh 59mm 37ss	7° 47' Nord
03/09/2005	11hh 59mm 17ss	7° 25' Nord

Declinazione del Sole

DATA	MEZZOGIORNO VERO A GREENWICH	DECLINAZIONE
14/09/2005	11hh 55mm 30ss	3° 16' Nord
15/09/2005	11hh 55mm 09ss	2° 53' Nord
16/09/2005	11hh 54mm 47ss	2° 30' Nord
17/09/2005	11hh 54mm 26ss	2° 07' Nord
18/09/2005	11hh 54mm 04ss	1° 43' Nord
19/09/2005	11hh 54mm 43ss	1° 20' Nord
20/09/2005	11hh 53mm 22ss	0° 57' Nord
21/09/2005	11hh 53mm 00ss	0° 34' Nord
22/09/2005	11hh 52mm 39ss	0° 10' Nord
23/09/2005	11hh 52mm 18ss	0° 13' Sud
24/09/2005	11hh 51mm 57ss	0° 36' Sud
25/09/2005	11hh 51mm 36ss	1° 00' Sud

Declinazione del Sole

DATA	MEZZOGIORNO VERO A GREENWICH	DECLINAZIONE
07/11/2005	11hh 43mm 42ss	16° 23' Sud
08/11/2005	11hh 43mm 46ss	16° 41' Sud
09/11/2005	11hh 43mm 51ss	16° 58' Sud
10/11/2005	11hh 43mm 57ss	17° 15' Sud
11/11/2005	11hh 44mm 03ss	17° 31' Sud
12/11/2005	11hh 44mm 10ss	17° 48' Sud
13/11/2005	11hh 44mm 19ss	18° 04' Sud
14/11/2005	11hh 44mm 28ss	18° 19' Sud
15/11/2005	11hh 44mm 37ss	18° 35' Sud
16/11/2005	11hh 44mm 48ss	18° 50' Sud

Declinazione del Sole

DATA	MEZZOGIORNO VERO A GREENWICH	DECLINAZIONE
16/12/2005	11hh 55mm 41ss	23° 20' Sud
17/12/2005	11hh 56mm 11ss	23° 22' Sud
18/12/2005	11hh 56mm 40ss	23° 24' Sud
19/12/2005	11hh 57mm 10ss	23° 25' Sud
20/12/2005	11hh 57mm 39ss	23° 26' Sud
21/12/2005	11hh 58mm 09ss	23° 26' Sud
22/12/2005	11hh 58mm 39ss	23° 26' Sud
23/12/2005	11hh 59mm 09ss	23° 26' Sud
24/12/2005	11hh 59mm 39ss	23° 25' Sud
25/12/2005	12hh 00mm 08ss	23° 23' Sud

Bibliografia - siti web

- www.vialattea.net/eratostene (altezza del Sole)
- www.jgiesen.de/welcomeEnglish.htm (analemma)
- www.analemma.com (analemma)
- www.navigazioneastronomica.it (latitudine e declinazione)
- www.metropolis (comuni e coordinate geografiche)
- Denis Guedj, *La chioma di Berenice*, Longanesi, 2003
- Bonollo, *Applicazioni Microsoft*, CEDAM, 2002

Dall'altezza del Sole alle funzioni goniometriche - I

Luigi Togliani

"Luce, suono e moto"

Corso A.I.F. e I.T.I.S. "Fermi" di Mantova

A. S. 2005-06

Mantova, 15 novembre 2005

Le funzioni goniometriche nella storia

Quando e dove sono nate le funzioni goniometriche?

Babilonesi Egiziani → Greci - Ellenismo; Indiani → Arabi → Europa occidentale

- Papiro Rhind - tavoletta Plimpton 322 (1700 a.C.ca) - Beroso (180 a.C.)

- Teoremi del coseno e dei seni negli *Elementi* di Euclide (300 a.C.)
- Relazioni tra angoli e corde in Aristarco (310-230 a.C.)
  e in Eratostene (276-194 a.C.) → **Astronomia**
- Prime (?) tavole goniometriche in Ipparco (180-125 a.C.)
- Trigonometria sferica di Menelao (100 d.C.)
- Formulario e tavole nell'*Almagesto* di Tolomeo (150 d.C.)

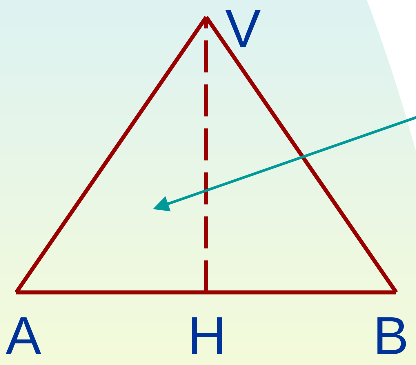
Le funzioni goniometriche nella storia

- *Sulvasutra* e *Siddhanta* (dal 400) indiani: introduzione concetto di seno
- Scuola del Kerala (1400): sviluppi in serie funzioni goniometriche
- Arabi: funzioni goniometriche (IX sec), identità (IX-XIII sec.), tavole (X-XV sec), scuole di traduzione (VIII-IX sec)

- Europa occidentale: traduttori (XII sec), trigonometria come disciplina autonoma (Regiomontano 1464) e completa (Viete 1593)
- Sviluppi in serie e legami con l'analisi (Gregory, Newton e Leibniz XVII sec, Riccati XVIII sec, Fourier XIX sec) e con i numeri complessi (De Moivre e Euler, XVIII sec)

Prototrigonometria

Papiro di Rhind o di Ahmes (1650 a.C.) → problema 56: *determinare il 'seqt' (rapporto profondità/elevazione) di una piramide alta 250 cubiti con base quadrata di lato 360 cubiti*→ forse c'è il concetto di cotangente



$$\text{seqt}\ A = \frac{\overline{AH}}{\overline{VH}} = \frac{180}{250} = \text{cotg}\ A$$

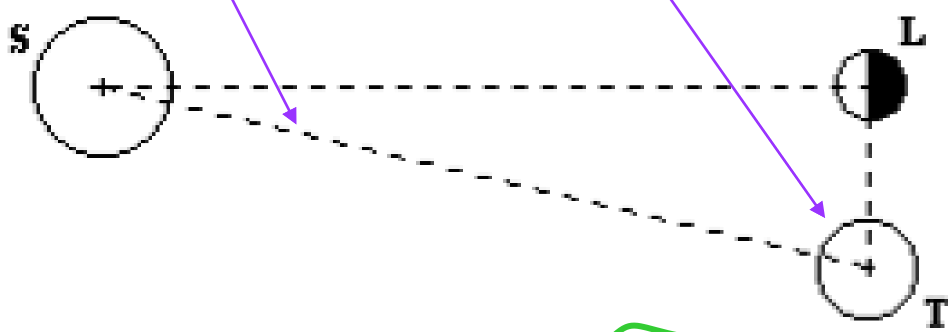
$$\text{seqt}\ A = \frac{\overline{AH}}{\overline{VH}} = \frac{220}{280}$$

piramide di Cheope

Tavoletta Plimpton 322 (1700 a.C. ca, periodo babilonese antico) → forse ha una tavola dei quadrati della secante e della tangente - non chiara la misura delle ampiezze

Aristarco di Samo (prima del 260 a.C.)

3° (invece è 9' ca) *87° (invece è 89°51' ca)*



$$\overline{LT}\,/\,\overline{ST} = sen\,3°$$

$$sen\,3° \cong 1/19 \quad \Rightarrow \quad \overline{ST} \cong 19\,\overline{LT} \qquad \left(invece \quad \overline{ST} \cong 388\,\overline{LT}\right)$$

$$0 < \alpha < \beta < \pi/2 \Rightarrow \frac{sen\alpha}{sen\beta} > \frac{\alpha}{\beta} > \frac{tg\alpha}{tg\beta} \Rightarrow \frac{1}{20} < sen3° < \frac{1}{18}$$

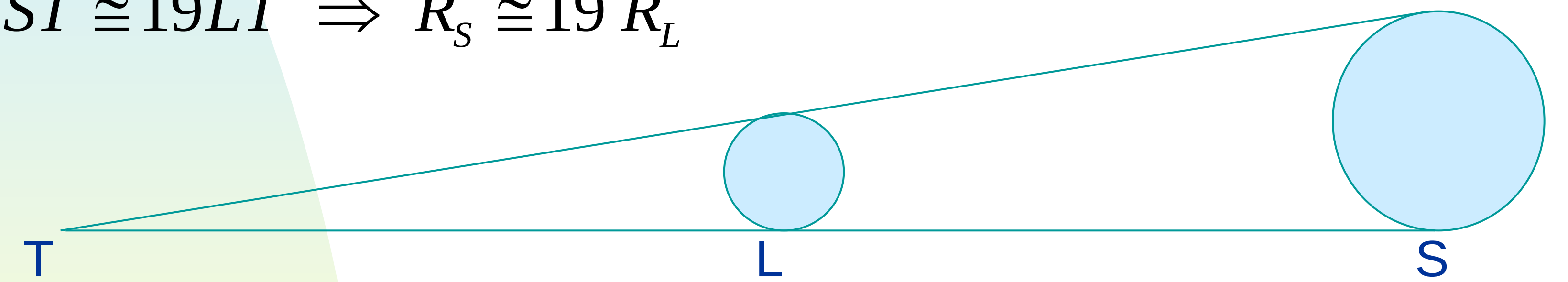
$$Es.: \quad \alpha = 3° \quad \beta = 30° \quad \frac{sen3°}{sen30°} > \frac{3}{30} = \frac{1}{20}$$

$$\alpha = 3° \quad \beta = 18° \quad \frac{tg3°}{tg18°} < \frac{3}{18} \Rightarrow sen3° < \frac{1}{6}tg18° \cdot \cos 3° < \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{18}$$

Aristarco di Samo

Aristarco sa che il Sole e la Luna si vedono dalla Terra sotto lo stesso angolo (è circa 30’): quindi

$$\overline{ST} \cong 19\overline{LT} \;\Rightarrow\; R_S \cong 19\,R_L$$

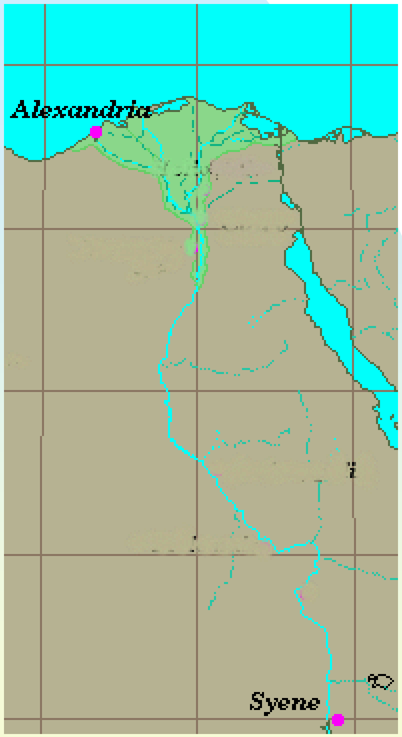


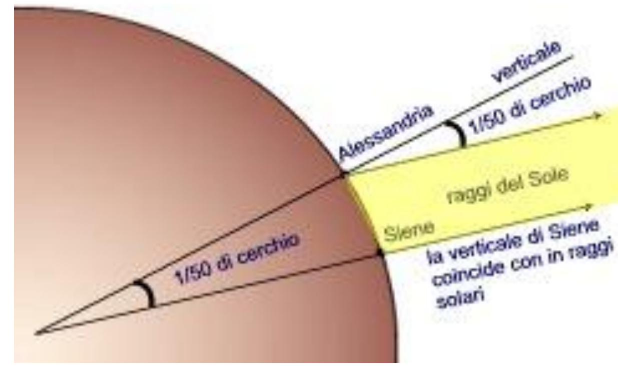
Dimostra: $\dfrac{19}{60} < \dfrac{R_L}{R_T} < \dfrac{43}{108}$, $\dfrac{19}{3} < \dfrac{R_S}{R_T} < \dfrac{43}{6}$ Quant’è R_T ?

Sulla grandezza e sulla distanza del Sole e della Luna (~ 260 a.C.)

Eratostene di Cirene (III secolo a.C.)

Misura del raggio terrestre





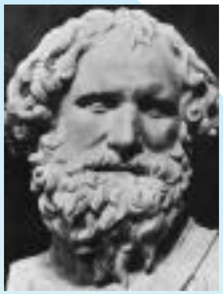
Terra sferica

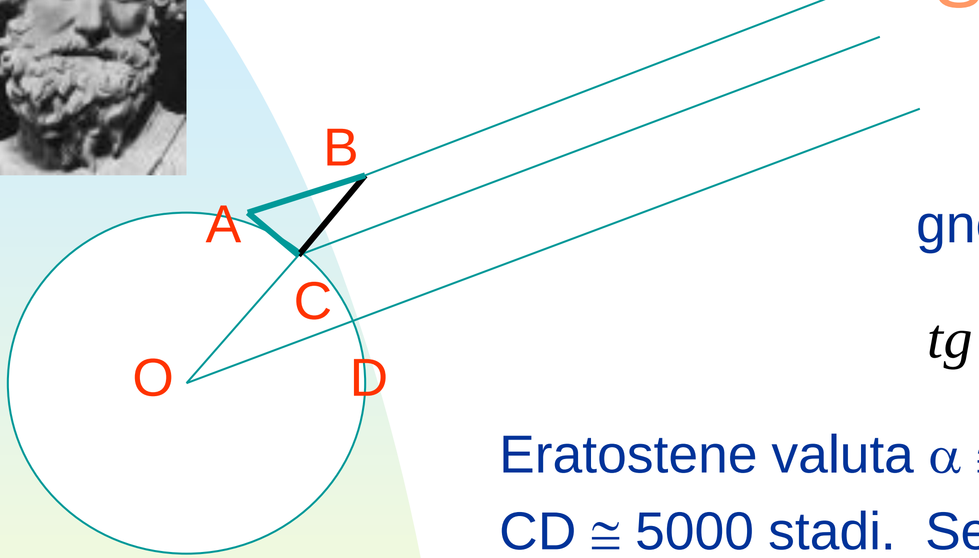
Siene e Alessandria sullo stesso meridiano

Ipotesi raggi del Sole paralleli

misura certa della distanza Siene-Alessandria

Eratostene di Cirene





$$ABC = COD = \alpha$$

C : Alessandria D : Siene

gnomone BC al solstizio estivo

$$tg\ \alpha = \overline{AC} / \overline{BC}$$

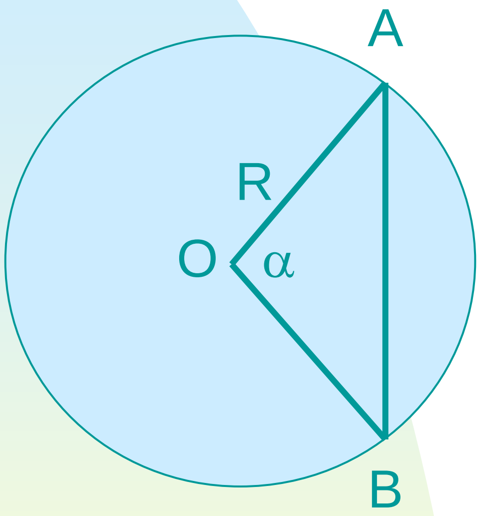
Eratostene valuta $\alpha \cong 360°/ 50 \cong 7{,}2°$, mentre l'arco CD $\cong$ 5000 stadi. Se 1 stadio $\cong$ 160 m, allora:

CD : $2\pi R$ = 1 : 50 e il raggio terrestre $R_T \cong$ 6369 km (invece di 6378 km).

Con il valore di R_T calcolato si possono valutare il raggio solare R_S e il raggio lunare R_L usando le relazioni di Aristarco.

Ipparco di Nicea (II sec. a.C.)

Calcolo della lunghezza della corda relativa a un dato angolo al centro



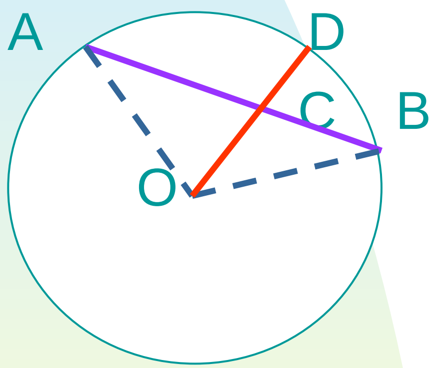
$$\alpha \quad \rightarrow \quad \overline{AB} = 2R \cdot sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Ipparco tabula i valori delle corde degli archi circolari →

fondatore della trigonometria

Menelao di Alessandria (ca 100 d.C.)

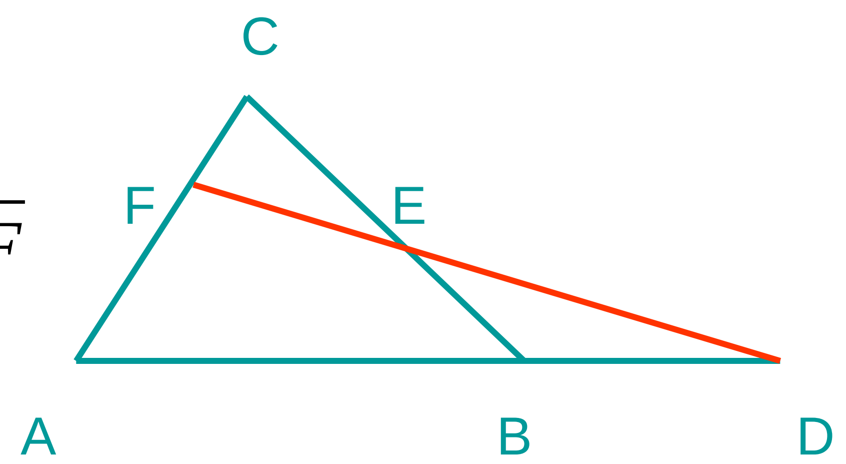
In *Sphaerica* → tavole sulle corde, applicazioni all'astronomia, teoremi sui triangoli piani e sferici



$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{senAOD}{senBOD}$$

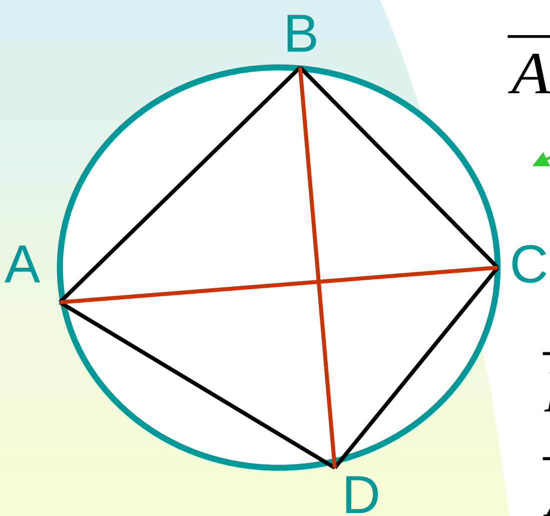
Teorema di Menelao

$$\overline{AD} \cdot \overline{BE} \cdot \overline{CF} = \overline{BD} \cdot \overline{CE} \cdot \overline{AF}$$



Tolomeo (Alessandria, ca 150 d.C.)

Almagesto : teorema di Tolomeo $\Rightarrow$ formule di addizione e bisezione $\Rightarrow$ costruzione delle tavole goniometriche



$$\overline{AB}\cdot\overline{CD}+\overline{AD}\cdot\overline{BC}=\overline{AC}\cdot\overline{BD}$$

se in particolare

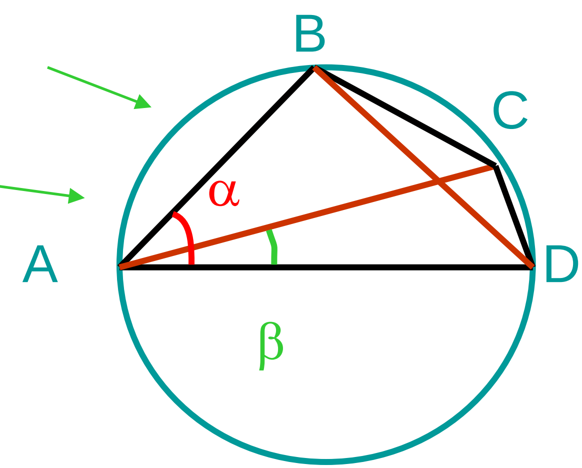
$$\overline{AD}=2R \quad \Rightarrow$$

$$\overline{BC}=2R\,sen(\alpha-\beta)$$

$$\overline{AB}=2R\,cos\alpha \qquad \overline{CD}=2R\,sen\beta$$

$$\overline{AC}=2R\,cos\beta \qquad \overline{BD}=2R\,sen\alpha \quad \Rightarrow$$

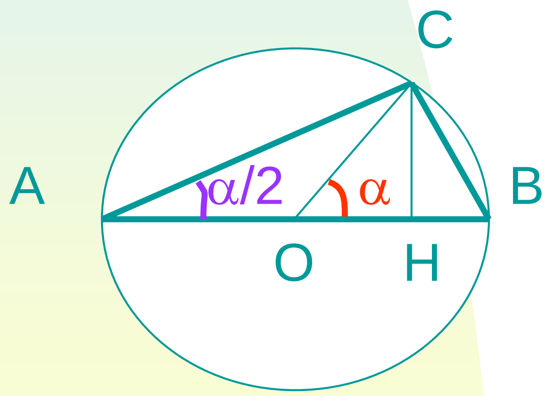
$$sen(\alpha-\beta)=sen\alpha\cdot cos\beta-cos\alpha\cdot sen\beta$$



Tolomeo

Dalle formule di sottrazione/addizione a quelle di bisezione con l'uso del I teorema di Euclide.

$$sen\left(\alpha/2\right)=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \qquad \cos\left(\alpha/2\right)=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$



Infatti:

$$\overline{AC}=2R\cos(\alpha/2) \qquad \overline{AH}=R(1+\cos\alpha)$$

$$\overline{AC}^2=\overline{AB}\cdot\overline{AH}$$

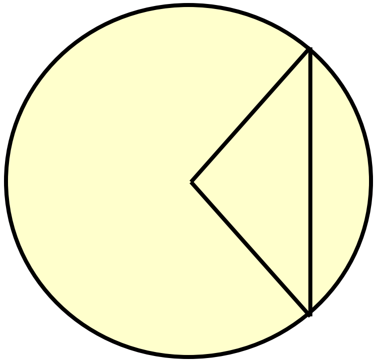
$$4R^2\cos^2(\alpha/2)=2R^2(1+\cos\alpha)$$

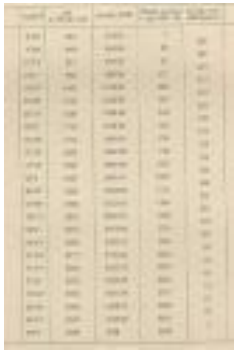
$$\Rightarrow \cos(\alpha/2)=\pm\sqrt{(1+\cos\alpha)/2}$$

Tolomeo

Tolomeo divide il cerchio in 360 parti, 1° in 60’ e 1’ in 60; considera sempre il legame tra la **corda** e l’angolo al centro.

Tolomeo costruisce tavole equivalenti a quelle del seno per 0° < α < 90° con passo 0,25° . (I libro dell’*Almagesto)*. Per costruire le tavole parte da angoli al centro di 120°, 90°, 72°, 60°, 36° e poi usa le sue formule.





La trigonometria indiana

Sulvasutra (400 ca) regole della corda, agrimensura

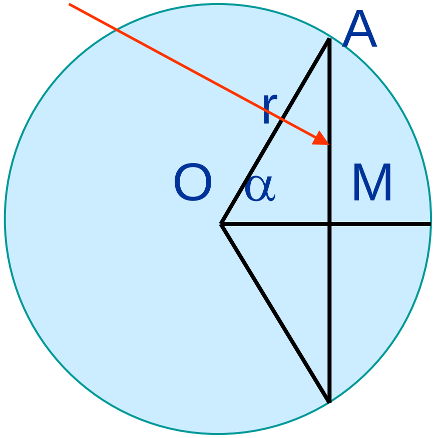
Siddhanta (400) sistemi di astronomia - *Pancha Siddhantika* di Varahamihira (500) e *Brahma Siddhanta* di **Brahmagupta** (628)

Aryabhata in *Aryabhatiya* (499) metà corda

$$jyva\ \alpha = \overline{AM} = r\ sen\ \alpha$$

$$kojyva\ \alpha = \overline{OM} = r\cos\alpha$$

$$jyva\ 30° = r/2 \qquad jyva\ 60° = r\sqrt{3}/2$$



Bhaskara (600 ca) approssima il seno con:

$$sen\ \alpha \cong \frac{16\alpha(\pi-\alpha)}{5\pi^2 - 4\alpha(\pi-\alpha)}$$

Brahmagupta (665) dà formula interpolante i seni delle tavole di Varahamihira e Aryabhata; ad es. 150 sen67°≅138,12 (anzichè 138,08)

La trigonometria indiana

Sviluppi in serie per costruire le tavole delle funzioni goniometriche

$$arctg\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

serie di Gregory (1668), forse già scoperta da **Madhava** di Sangama_ gramma (1350-1425, scuola del ***Kerala***, India meridionale)

$$sen\, x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$cos\, x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

serie di Newton (1676) forse già trovate da Madhava

$$sen(x+h) \approx senx + \frac{h}{r} cosx - \frac{h^2}{2r^2} senx$$

$$cos(x+h) \approx cosx - \frac{h}{r} senx - \frac{h^2}{2r^2} cosx$$

(h piccolo, r raggio)

formule di Taylor (1685-1731) forse già trovate da Madhava

La trigonometria araba

Selezione di elementi ellenistici e indiani per:

a) introdurre le sei funzioni goniometriche principali

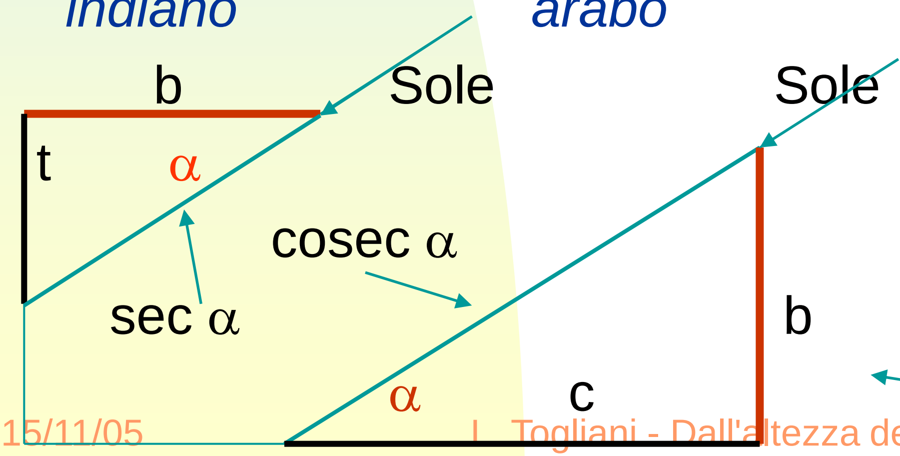
b) formulare il teorema dei seni e altre identità

c) costruire tavole goniometriche dettagliate (interpolazione)

passaggio errato

a) jyva $\rightarrow$ **jiba** $\rightarrow$ **jyb** $\rightarrow$ **jaib** $\rightarrow$ **sinus** (seno, petto, baia, curva)

indiano *arabo* *latino*



al-Hasib (IX secolo) definisce:

$t = b\ tg\alpha = tg\alpha \quad (b = 1)$ *zill*

$c = b\ cotg\alpha = cotg\alpha \quad (b = 1)$ *zill makus*

α altezza del Sole, b bastoncino

La trigonometria araba

Scuole arabe di traduzione (Baghdad VIII-IX sec) → testi indiani, persiani, siriaci, greci → trasmissione all'Europa

es. *Elementi* di Euclide *Almagesto* di Tolomeo ← **Thabit ibn Qurra**

b) Abu Wafa (X sec) → formule addizione/sottrazione

Nasir al-Tusi (XIII sec) → teorema dei seni

$$\cos\alpha = sen(90° - \alpha)$$
$$cotg\,\alpha = tg(90° - \alpha)$$

c) Al-Hasib (850 ca) → tavole del seno e della tangente con 5 decimali esatti, con passo 1°, usando le formule di sottrazione e di bisezione

Ulug Beg (1440) → tavole con passo 1', con 5 decimali esatti

al-Kashi (XV sec) → col metodo iterativo ottiene 16 decimali esatti

La trigonometria araba

Al-Kashi (1380 ca - 1429) in *Trattato sulla corda e sul seno*

usa: $$sen\,3\alpha = 3sen\,\alpha - 4sen^3\alpha$$

noto sen 3α = sen 3° , posto x = sen α = sen 1° ,

si ottiene: $$x = \frac{4x^3 + \text{sen}\,3°}{3}$$

se x è piccolo, x^3 sarà trascurabile $\Rightarrow$

per approssimazioni:

$$x_1 = \frac{sen\,3°}{3} \quad , \quad x_2 = \frac{4x_1^{\,3} + sen\,3°}{3} \quad , \quad .... \quad , \quad x_n = \frac{4x_{n-1}^{\,3} + sen\,3°}{3}$$

metodo iterativo

La trigonometria in occidente

Scuole di traduttori del XII secolo

Gerardo da Cremona → *Almagesto* di Tolomeo, *Elementi* di Euclide, *Algebra* di al-Khuwarizmi

Roberto da Chester → *Algebra* di al-Khuwarizmi introduzione di *sinus* dall'arabo *jiba* e *jaib*

Regiomontano (J. Müller da Konigsberg, 1436-1476)

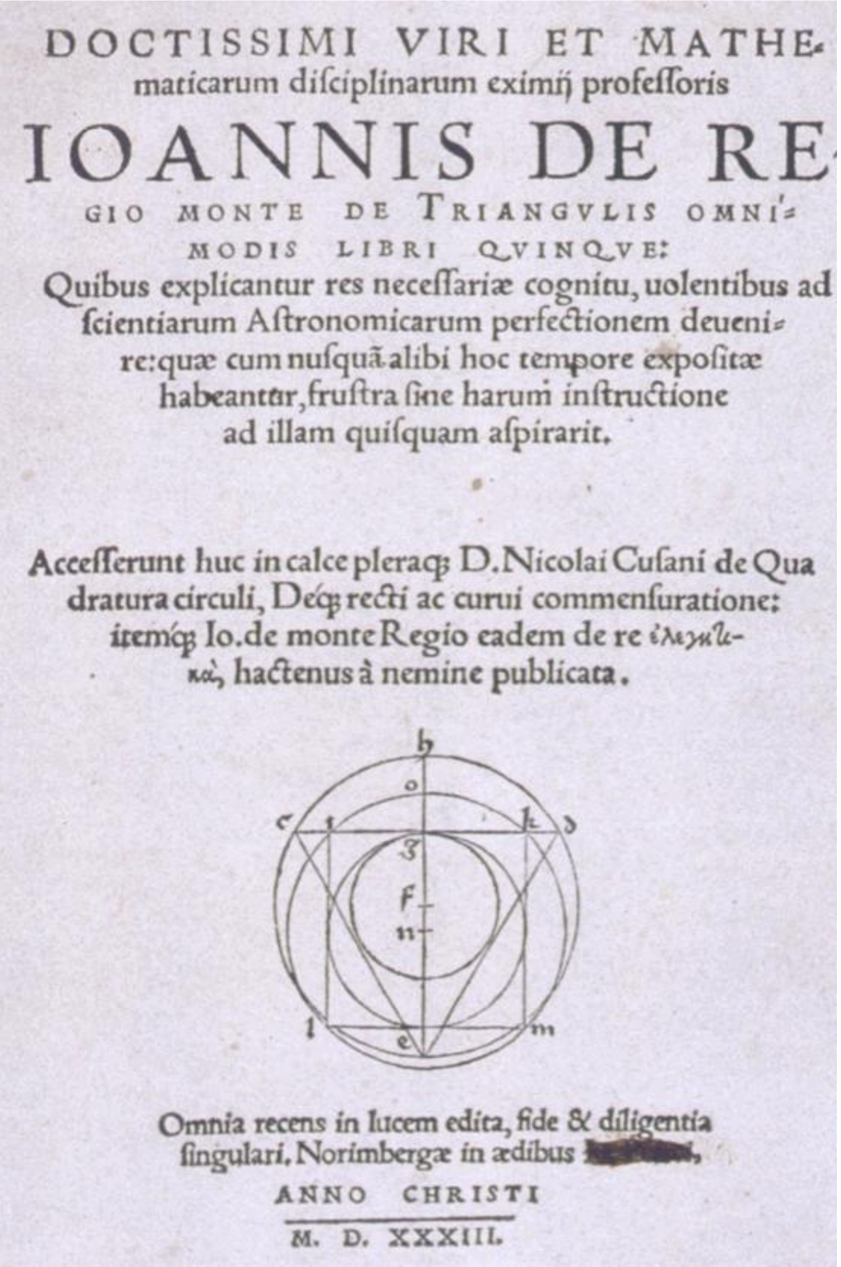
De triangulis 1464 → trigonometria disciplina autonoma dall'astronomia

Tabulae directionum → tavole del seno e della tangente (*numerus*)

Usa strumenti algebrici (arabi) per la trigonometria

Nicolò Copernico (1473-1543) → *De lateribus et angulis triangulorum* 1542, simile al *De triangulis* → allievo **Rheticus** (1514-1576) in *Opus palatinum de triangulis:* sviluppo trigonometria, tavole molto elaborate (raggio di 10.000.000 di unità) → **Pitiscus** : *'Trigonometria'* (1595)

Regiomontano



DOCTISSIMI VIRI ET MATHEmaticarum disciplinarum eximij professoris

IOANNIS DE REGIO MONTE DE TRIANGVLIS OMNIMODIS LIBRI QVINQVE:

Quibus explicantur res necessariæ cognitu, uolentibus ad scientiarum Astronomicarum perfectionem deueni re: quæ cum nusquã alibi hoc tempore expositæ habeantur, frustra sine harum instructione ad illam quisquam aspirarit.

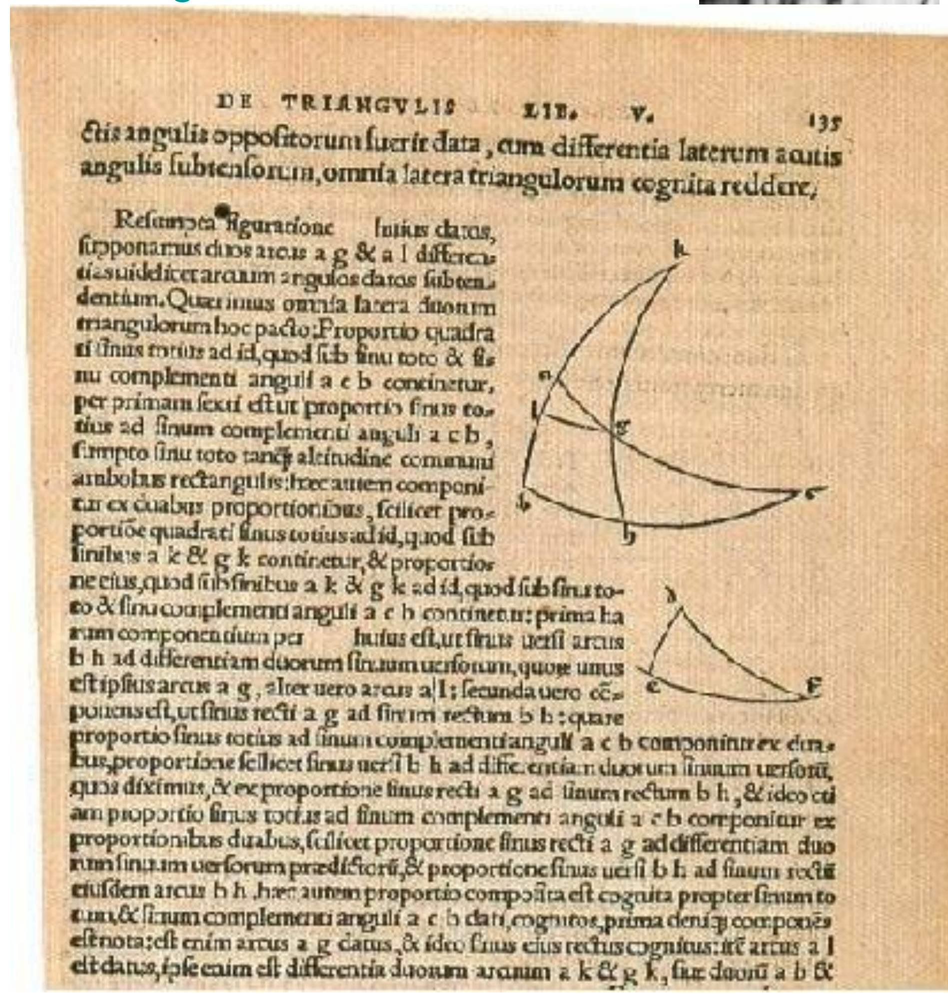
Accesserunt huc in calce pleraq; D. Nicolai Cusani de Quadratura circuli, Deq; recti ac curui commensuratione: itemq; Io. de monte Regio eadem de re ἐλεγκτικά, hactenus à nemine publicata.

Omnia recens in lucem edita, fide & diligentia singulari. Norimbergæ in ædibus [redacted],

ANNO CHRISTI

M. D. XXXIII.

De triangulis , edizione 1533



DE TRIANGVLIS LIB. V. 135

ctis angulis oppositorum fuerit data, cum differentia laterum acutis angulis subtensorum, omnia latera triangulorum cognita reddere.

Resumpta figuratione huius datos, supponamus duos arcus a g & a l differentias uidelicet arcuum angulos datos subtendentium. Quærimus omnia latera duorum triangulorum hoc pacto: Proportio quadrati sinus totius ad id, quod sub sinu toto & sinu complementi anguli a c b continetur, per primam sexti est ut proportio sinus totius ad sinum complementi anguli a c b, ...

François Viete

François Viète (1540-1603)

- *Canon mathematicus* 1579 : tavole delle sei funzioni goniometriche, necessità di sostituire le frazioni sessagesimali in decimali
- *Variorum de rebus mathematicis* 1593: teorema delle tangenti, formule di prostaferesi e di Werner(1468-1528); con una formula si eseguiva il prodotto x·y : posto x=2 cos α , y=cos β , ricavati α e β con le tavole $\Rightarrow$

  x·y = 2 cos α · cos β = cos(α+β) + cos(α–β) $\leftarrow$ *letti sulle tavole* $\rightarrow$

  si esegue una somma al posto di un prodotto $\rightarrow$

  metodo usato da Ticho Brahe da Nepero (introduce i logaritmi nel 1614)
- cos 2α , cos 3α , …. sen 2α , sen 3α , ….

$$cos\ nx = cos^n x - \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} cos^{n-2} x\ sen^2 x + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} cos^{n-4} x\ sen^4 x - \ldots$$

$$sen\ nx = n\ cos^{n-1} x\ senx - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3} cos^{n-3} x\ sen^3 x + \ldots$$

Trigonometria e analisi matematica

James Gregory (1638-1675), **Isaac Newton** (1642-1727), **Gottfried W. Leibniz** (1646-1716) $\rightarrow$ sviluppi in serie e legami con l'analisi

Jacques (1654-1705) e **Jean** (1667-1748) **Bernoulli** $\rightarrow$ cos nx , sen nx per n razionale

Abraham De Moivre (1667-1754) $\rightarrow$ $\cos nx + i \operatorname{sen} nx = (\cos x + i \operatorname{sen} x)^n$ formula da lui usata anche se non esplicitata

Leonhard Euler (1707-1783) $\rightarrow$ $e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$ $\rightarrow$ sen(1+i) e altre applicazioni nel campo complesso

Vincenzo Riccati (1707-1775) $\rightarrow$ funzioni iperboliche:

$$cosh\ x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad senh\ x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \Rightarrow e^x = cosh\ x + senh\ x$$

J. B. Delambre (1749-1822) e **P. F. Mechain** (1744-1804) $\rightarrow$ meridiano terrestre $\rightarrow$ unità 'naturale' per le lunghezze

L’analisi di Fourier

Joseph Fourier (1768-1830)

Possibilità di sviluppare in serie armonica una funzione f periodica

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\operatorname{sen} nx\right)$$

ove i coefficienti sono tali che:

$$a_n=\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \quad , \quad b_n=\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen} nx\,dx \quad ; \quad n=1,2,3,\ldots$$

Le frequenze di ogni armonica sono multiple di una di esse:

$$\nu_0=\frac{1}{T} \quad , \quad \nu_n=n\,\nu_0 \quad , \quad n=1,2,3,\ldots \quad T\ periodo\ di\ f$$

L’idea era già stata avanzata da Daniel Bernoulli.

Trigonometria: indirizzi

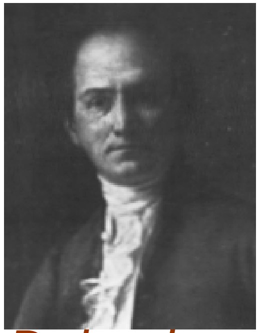
A partire dal XVII secolo:

Eulero

trigonometria

indirizzo 'funzionale' e analitico

indirizzo topografico e astronomico



Delambre

Funzioni goniometriche: terminologia

- **seno** : Roberto da Chester (XII sec.) dall'indiano *jyva* (Aryabhata, 500)
- **coseno**: Edmund Gunter (1620) e Viete (XVII sec.) usa *sinus residuae*
- **tangente**: Thomas Fincke (1583)
- **cotangente**: Edmund Gunter (1620)
- **radiante**: James Thomson (1873)

Si sono usate anche le funzioni senoverso (versen (x) = 1 - cos x) e cosenoverso (vercos (x) = 1 - sen x)

Bibliografia - siti web

- C. Boyer (2002) : *Storia della Matematica* - Oscar Mondadori, MI
- G. Ghevergese Joseph (2003) : *C'era una volta un numero* - TEA, MI
- E. Carruccio (1978) : *Storia delle matematiche* - Pitagora, BO
- Lamberti - Mereu - Nanni (2001) : *Matematica due* - ETAS, MI
- Negrini - Ragagni (2003) : *MAST, Temi di Matematica per l'esame di stato* - Clio, MI
- Bergamini - Trifone - Barozzi (2005) : *Manuale blu di Matematica* - Zanichelli, BO
- Bellodi - Francesio - Pezzi - Puviani (1990) : *Linguaggio Pascal* - Zanichelli, BO
- www2.math.unifi.it/~archimede/archimede/index.html
- www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Indexes/Analysis.html
- www.matematicamente.it/storia/index.html